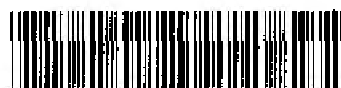


面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

概率极限理论基础

林正炎　陆传荣　苏中根　编著





高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

(京)112号

内容简介

本书是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果，是面向21世纪课程教材和普通高等教育"九五"国家级重点教材。本书既介绍了经典概率极限理论的基本内容，也简要地介绍了现代概率极限理论的主要结果，包含独立和理论、测度弱收敛理论、强极限理论、B值空间中的概率极限理论等内容，附录中收集了常用的概率不等式。

本书可作为高等学校统计与概率专业的教科书，也可供有关的科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率极限理论基础/林正炎等编著. -北京：高等教育出版社，1999

ISBN 7-04-007705-1

Ⅰ.概… Ⅱ.林… Ⅲ.极限(数学)-概率论 Ⅳ.0211.4

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第29828号

概率极限理论基础

林正炎　陆传荣　苏中根　编著

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　　话	010-64054588	传　　真	010-64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	北京外文印刷厂		
纸张供应	山东高唐纸业集团总公司		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	1999年9月第1版
印　　张	16	印　　次	1999年9月第1次印刷
字　　数	288 000	定　　价	17.10元



面向21世纪课程教材



普通高等教育“九五”
国 家 级 重 点 教 材

序　言

概率论极限理论是概率论的主要分支之一，也是概率论的其他分支和数理统计的重要基础。前苏联著名概率论学者科尔莫戈罗夫和格涅坚科在评论概率论极限理论时曾说过："概率论的认识论的价值只有通过极限定理才能被揭示，没有极限定理就不可能去理解概率论的基本概念的真正含义。"极限理论的基本内容是每一概率统计工作者必须掌握的知识与工具。19 世纪 20 年代以前，中心极限定理是概率论研究的中心课题。经典极限理论是概率论发展史上的重要成果。近代极限理论的研究至今方兴未艾，它不仅深化了经典理论的许多基本结果，也极大地拓展了自己的研究领域。这些都是和概率论其他分支以及数理统计的最新发展相联系的。

本书旨在介绍经典的和近代的概率极限定理的基本理论。内容包括：关于独立随机变量和的经典的分析概率论；随机过程与数理统计中十分有用的泛函极限定理；近二十年中发展起来的强不变原理的基本结果和 Banach 空间值概率极限理论初步。全书分六章，第一章是有关的概率论基本知识的简要回顾和必要补充；第二章叙述了分析概率论的主要结果；第三章综述了大数定律、重对数律、完全收敛性和随机变量级数的收敛性；第四章论述了概率测度弱收敛——弱不变原理的基本理论；第五章给出了强逼近理论的基本结果；第六章介绍了 Banach 空间值随机变量的若干极限定理。概率不等式是极限理论的关键性工具，在概率论的其他分支和数理统计的研究中也扮演着重要角色。在附录中我们收集了一批重要的概率不等式。

本书是概率论极限理论的一本入门教材，可作为概率论与数理统计专业研究生的学位课程教材，也可作为大学数学专业学生的选修课教材，并可供需要这方面知识的读者自学。作者也期望本书对于概率统计的专业工作者有参考价值。

本书的写作和出版得到了原国家教委重点教材建设基金的资助，国家自然科学基金和浙江省自然科学基金的资助，也得到了杭州大学教材出版基金的资助。本书得到了概率论与数理统计教学指导组专家的指导和支持，特别是陈木法教授等提出了不少具体的建议，使本书增色不少。高等教育出版社，特别是高尚华同志为本书的出版做了大量的工作。作者谨向他们以及所有关心

支持本书出版工作的概率统计界朋友表示衷心的感谢。

限于作者水平，不妥或谬误之处在所难免，恳请同行专家和广大读者不吝赐教。

作 者

1998 年 6 月

于杭州大学

缩写及记号

r.v.　随机变量

d.f.　分布函数

c.f.　特征函数

a.s.　几乎必然地

i.d.　无穷可分

i.i.d.　相互独立同分布

A_n, i.o.　无穷多个 A_n 发生

$(\Omega, \mathscr{A}, P)$　概率空间

A^c　A 的对立事件

$A \Delta B$　A、B 的对称差，即 $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

∂A　A 的边界

mX　随机变量 X 的中位数

EX　随机变量 X 的数学期望

$\mathrm{Var}X$　随机变量 X 的方差

$\mathrm{Cov}(X, Y)$　随机变量 X 与 Y 的协方差

$X_n \to X$ $a.s.$　随机变量列 $\{X_n\}$ 几乎必然收敛于随机变量 X

$X_n \xrightarrow{P} X$　随机变量列 $\{X_n\}$ 依概率收敛于随机变量 X

$\xrightarrow{d}$　依分布收敛（或弱收敛）

$\xrightarrow{L_p}$　p 阶平均收敛

$\mu_n \Rightarrow \mu$　测度序列 $\{\mu_n\}$ 弱收敛于测度 μ

$\sigma(X_1, \cdots, X_n)$　由随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 生成的 σ 域

$\sigma(\mathscr{F})$　由集类 $\mathscr{F}$ 生成的 σ 域

$I(A)$　集 A 的示性函数

X^+　$\max(X, 0)$

X^-　$-\min(X, 0)$

$\mathbf{R}^k$　k 维欧氏空间

$\mathscr{B}^k$　k 维 Borel 集全体

$\mathbf{R}^\infty$　无穷维欧氏空间

$\mathscr{B}^{\infty}$ 无穷维 Borel 集

$w_x(\delta)$ 函数 $x(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的连续模

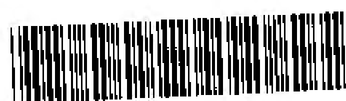
$[a]$ 实数 a 的整数部分

$a_n = o(b_n)$ $\lim a_n/b_n = 0$

$a_n = O(b_n)$ $\limsup a_n/b_n < \infty$

$\pi_{t_1,\cdots,t_k}$ 在 $(t_1,\cdots,t_k)$ 上的投影映射

责任编辑　高尚华
封面设计　张　楠
责任绘图　尹文君
版式设计　郭思旭
责任校对　郭思旭
责任印制　陈伟光



目　录

第一章 准备知识

§1 随机变量与概率分布

设Ω是由一些元素组成的非空集，其元素（常记作ω）叫做点或**基本事件**. 通常称Ω为**基本事件空间**. 记$\mathscr{A}$为由Ω的某些子集组成的集类，如果它具有性质：

(i) $\Omega \in \mathscr{A}$；

(ii) 若$A_i \in \mathscr{A}, i = 1,2,\cdots$，则$\bigcup\limits_i A_i \in \mathscr{A}$，

那么称$\mathscr{A}$为**事件的σ域**，并称$\mathscr{A}$中的元素为**事件**.

设$P(A)(A \in \mathscr{A})$是定义在σ域$\mathscr{A}$上的实值集函数. 若它满足条件：

(i) 对每一$A \in \mathscr{A}$，有$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

(ii) $P(\Omega) = 1$；

(iii) 对任意$A_n \in \mathscr{A}(n = 1,2,\cdots)$，$A_n \cap A_m = \varnothing (n \neq m)$，有可列可加性：

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

则称$P(\cdot)$是$\mathscr{A}$上的**概率测度**，简称**概率**. 值$P(A)$称为事件A的**概率**. 三元总体$(\Omega,\mathscr{A},P)$称为**概率空间**.

概率的可列可加性与如下的上连续性等价：设事件列$\{B_n\}$单调不增，即$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$且对任何$n \geqslant 1$，$\bigcap\limits_{k \geqslant n} B_k = \varnothing$，则$\lim\limits_{n\to\infty} P(B_n) = 0$.

设$X = X(\omega)$是定义在Ω上的有限实值函数，如果它关于$\mathscr{A}$是可测的，就称X为一**随机变量**（简记为r.v.）. 以后我们也允许r.v.在概率为零的集合上取无穷值. 记$\mathscr{B}$为$\mathbf{R}^1 = (-\infty,\infty)$中所有Borel集组成的集类（它是一个$\sigma$域）. 我们称定义在$\mathscr{B}$上的集函数$P_X(B) = P\{\omega: X(\omega) \in B\}(B \in \mathscr{B})$为r.v. X的**概率分布**. 这样，由概率空间$(\Omega,\mathscr{A},P)$上的一个r.v. X可以诱导出一个新的概率空间$(\mathbf{R}^1,\mathscr{B},P_X)$.

记$F(x) = P_X\{(-\infty,x)\} = P(X < x)(x \in \mathbf{R}^1)$，称它是r.v. X的**分布函数**（简记为d.f.）. 易知它具有性质：

(i) $F(x)$ 是不减、左连续的；

(ii) $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0, \lim_{x\to+\infty} F(x)=1$.

反之，可以证明任一具有性质(i)、(ii)的函数 $F(x)$ 必为某个概率空间上某一 r.v. X 的 d.f.

如果在 $\mathbf{R}$ 上存在一个有限或可列的点集 B，对每一 $x\in B$，$P(X=x)>0$ 且使得 $P(X\in B)=1$，则称 r.v. X 是离散型的，称它的 d.f. $F(x)$ 是离散分布，使得 $P(X=x)>0$ 的 x 为 r.v. X 的**可能值**.

如果 r.v. X 对 $\mathbf{R}^1$ 上任一有限或可列的点集 B，有 $P(X\in B)=0$，就称 r.v. X 的分布是**连续的**. 若对任何 Lebesgue 测度(L 测度)为 0 的 Borel 集 B，有 $P(X\in B)=0$，则称 r.v. X 是连续型的，它具有**绝对连续的分布**. 若 X 的分布是**连续的**，且存在 L 测度为 0 的 Borel 集 B，使 $P(X\in B)=1$，则称 r.v. X 的分布是**奇异的**.

若 d.f. $F(x)$ 是绝对连续的，即对每一 x 有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $p(x)$ 是非负可积函数. 称 $p(x)$ 是 r.v. X 的**概率(分布)密度或密度函数**.

若对每一 $\varepsilon>0$，有 $F(x+\varepsilon)-F(x-\varepsilon)>0$，则称 x 是 d.f. $F(x)$ 的一个**支撑点**. 全体支撑点组成的集合称为 F 的**支撑**. d.f. 的不连续点是它的支撑点.

设 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 是一概率空间，如果 $A\in\mathscr{A}$，$P(A)>0$，且对任何 $B\subset A$，或者 $P(B)=0$，或者 $P(B)=P(A)$，则称 A 是 P 的一个**原子**.

由 Lebesgue 分解定理和单调函数的性质可知，任一 d.f. $F(x)$ 可唯一地分解成如下形式：

$$F(x)=C_1F_1(x)+C_2F_2(x)+C_3F_3(x), \tag{1.1}$$

其中 $C_i\geqslant 0(i=1,2,3)$，$\sum_{i=1}^{3}C_i=1$，$F_1(x),F_2(x),F_3(x)$ 分别是离散的、绝对连续的和奇异的 d.f.

设 X 是 r.v.，当 X 与 $-X$ 有相同的分布时，我们称 X 是**对称的** r.v.

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是定义在同一概率空间上的 r.v.，则称 $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 **n 维随机变量或随机向量**. 对任一 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的 Borel 集 B，记

$$P_{\mathbf{X}}(B)=P(\mathbf{X}\in B)=P\{\omega:(X_1(\omega),\cdots,X_n(\omega))\in B\},$$

称 $P_{\mathbf{X}}$ 是随机向量 $\mathbf{X}$ 的概率分布. 记

$$F(x_1,\cdots,x_n)=P\{X_1<x_1,\cdots,X_n<x_n\},(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n,$$

称它为 n 维随机变量 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的 **n 元分布函数或随机向量 $\mathbf{X}$ 的分布函数**.

易知它具有性质：

(i) 对每一x_i ($i=1,\cdots,n$)，$F(x_1,\cdots,x_n)$ 是不减左连续的；

(ii) $\lim\limits_{x_i\to-\infty}F(x_1,\cdots,x_n)=0\quad(i=1,\cdots,n)$，

$$\lim_{x_1\to+\infty,\cdots,x_n\to+\infty}F(x_1,\cdots,x_n)=1;$$

(iii) 对$\mathbf{R}^n$中任一矩形集$A=\{x=(x_1,\cdots,x_n);a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,1\leqslant i\leqslant n\}$，有

$$\begin{aligned}P(\mathbf{X}\in A)&=P\{a_i\leqslant X_i\leqslant b_i,1\leqslant i\leqslant n\}\\&=F(b_1,\cdots,b_n)-\sum_{i=1}^{n}F(b_1,\cdots,a_i,\cdots,b_n)+\cdots\\&\quad+(-1)^nF(a_1,\cdots,a_n).\end{aligned}$$

$$F_j(y)=\lim_{\substack{y_i\to\infty\\ i\neq j}}F(y_1,\cdots,y_{j-1},y,y_{j+1},\cdots,y_n)$$

称为随机向量$\mathbf{X}$的**一元边际分布**.

设$X_1,\cdots,X_n$是n个r.v.，称它们是**相互独立的**，若对$\mathbf{R}^1$中任意n个Borel集$B_1,\cdots,B_n$，事件$\{\omega;X_i(\omega)\in B_i\}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$是相互独立的，即

$$P\{\bigcap_{i=1}^{n}(X_i\in B_i)\}=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\in B_i).$$

易知r.v.$X_1,\cdots,X_n$相互独立当且仅当对任何实数$x_1,\cdots,x_n$有

$$F(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F_i(x_i),$$

其中$F_i(x)=P(X_i<x)$.

设r.v.X_1和X_2独立且它们的d.f.分别为$F_1(x)$和$F_2(x)$，那么r.v.X_1+X_2的d.f.为

$$F_1*F_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(x-u)\mathrm{d}F_2(u),$$

F_1*F_2称为F_1与F_2的**卷积**.

若$X_1,X_2,\cdots$是一列r.v.，且对每一n，$X_1,\cdots,X_n$是相互独立的，则称此r.v.序列是**相互独立的**. 又若$X_1,\cdots,X_{n+m}$是相互独立的r.v.，而f和g分别是定义在$\mathbf{R}^m$和$\mathbf{R}^n$上，取值于$\mathbf{R}^1$中的Borel可测函数，那么$f(X_1,\cdots,X_m)$和$g(X_{m+1},\cdots,X_{n+m})$是独立的r.v.

§2 数学期望及其性质

设$X=X(\cdot)$是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{A},P)$上的r.v.，如果$\int_\Omega|X|\mathrm{d}P<$

∞，就称 r.v. X 的**数学期望**或**均值**存在(或称 r.v. X 是**可积的**)，记作 EX，它由下式定义：

$$EX = \int_\Omega X \mathrm{d}P. \tag{2.1}$$

利用积分变换，也可写成 $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}F(x)$.

设 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的 Borel 可测函数，如果 r.v. $g(X)$ 的数学期望存在，即 $E|g(X)|<\infty$，则由积分变换可知

$$Eg(X) = \int_\Omega g(X)\mathrm{d}P = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{d}F(x). \tag{2.2}$$

设 k 是正整数，若 r.v. X^k 的数学期望存在，就称它为 X 的 **k 阶原点矩**，记为 α_k. 由(2.2)知

$$\alpha_k = EX^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k\mathrm{d}F(x). \tag{2.3}$$

设 k 是正实数，若 $|X|^k$ 的数学期望存在，就称它为 X 的 **k 阶绝对矩**，记为 β_k. 由(2.2)知

$$\beta_k = E|X|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k\mathrm{d}F(x). \tag{2.4}$$

X 的 **k 阶中心矩** μ_k 和 **k 阶绝对中心矩** ν_k 分别定义为：

$$\mu_k = E(X-EX)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\alpha_1)^k\mathrm{d}F(x),$$

$$\nu_k = E|X-EX|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |x-\alpha_1|^k\mathrm{d}F(x).$$

我们称二阶中心矩为**方差**，记作 $\mathrm{Var}X$ 或 DX. 显然有

$$\mathrm{Var}X = \mu_2 = \nu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2.$$

容易验证，若 α_k 存在，则对一切正整数 $m<k$，α_m 存在；若 β_k 存在，则对一切正数 $m<k$，β_m 存在且有 $\beta_m^{1/m} \leqslant \beta_k^{1/k}$. 从而，对每一 l 和 m 有 $\beta_m\beta_l \leqslant \beta_{m+l}$. 对 ν_k 也有类似的结论.

关于数学期望，容易验证下列性质成立：

1) 若 r.v. X，Y 的期望 EX 和 EY 存在，则对任意实数 α、β，$E(\alpha X+\beta Y)$ 也存在，且

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha EX + \beta EY.$$

2) 设 $A \in \mathscr{A}$，用 I_A 表示集 A 的示性函数. 若 EX 存在，则 $E(XI_A)$ 也存在，且

$$E(XI_A) = \int_A X\mathrm{d}P.$$

此外，$E(|X|I_A)=0$ 的充要条件是 $P(A)=0$，或者在 A 中 a.s. 成立着 $X=0$ (a.s. 是"几乎必然"的简写).

3) 若 EX 存在，则下面三命题等价：

(i) $X=0$ a.s.；

(ii) 对一切 $A\in\mathscr{A}$，$E(XI_A)=0$；

(iii) $E|X|=0$.

4) 若 $\{A_k\}$ 是 Ω 的一个分划，即 $A_k\cap A_m=\varnothing(k\neq m)$ 且 $\Omega=\bigcup_k A_k$，则

$$EX=\int_\Omega X\mathrm{d}P=\sum_k\int_{A_k}X\mathrm{d}P.$$

5) 设 X 是 r.v.，$A\in\mathscr{A}$. 若有 α、$\beta\in\mathbf{R}^1$ 使得在 A 上 a.s. 成立着 $\alpha\leqslant X\leqslant\beta$，则 $\int_A X\mathrm{d}P$ 存在，且有

$$\alpha P(A)\leqslant\int_A X\mathrm{d}P\leqslant\beta P(A).$$

特别地，若 X 是在 Ω 上 a.s. 有界的，则 EX 必存在. 进一步，若有 r.v. X_1 和 X_2，EX_1 和 EX_2 都存在，且在 A 上 a.s. 成立着 $X_1\leqslant X\leqslant X_2$，则 EX 存在并且

$$\int_A X_1\mathrm{d}P\leqslant\int_A X\mathrm{d}P\leqslant\int_A X_2\mathrm{d}P.$$

6) 设 EX 存在，并由关系式

$$G_X(A)=\int_A X\mathrm{d}P,\ A\in\mathscr{A}$$

定义 $\mathscr{A}$ 上的集函数 $G_X(\cdot)$，那么它是可列可加的. 特别地，当 $X\geqslant0$ a.s. 时，G_X 是 $\mathscr{A}$ 上的一个有限测度.

关于矩的若干不等式陈述于附录二的四和五中，它们是十分有用的.

关于矩的存在性可写出如下的必要条件和充分条件：

定理 2.1 设对 r.v. X 存在 $p>0$，使 $E|X|^p<\infty$，则

$$\lim_{x\to\infty}x^pP(|X|\geqslant x)=0. \tag{2.5}$$

证 记 X 的 d.f. 为 $F(x)$. 因为 $E|X|^p<\infty$，故有

$$\lim_{x\to\infty}\int_{|t|\geqslant x}|t|^p\mathrm{d}F(t)=0.$$

但是

$$x^pP(|X|\geqslant x)\leqslant\int_{|t|\geqslant x}|t|^p\mathrm{d}F(t),$$

由此即可推得(2.5).

定理 2.2 设 r.v. $X\geqslant0$(a.s.)，它的 d.f. 为 $F(x)$. 那么 $EX<\infty$ 的充要

条件是$\int_0^\infty (1-F(x))\mathrm{d}x<\infty$. 这时

$$EX=\int_0^\infty (1-F(x))\mathrm{d}x. \tag{2.6}$$

证 对于非负 r. v. X,利用 Fubini 定理有

$$\begin{aligned}EX&=\int_\Omega X(\omega)\mathrm{d}P(\omega)=\int_\Omega\int_0^\infty I_{(x\leqslant X(\omega))}\mathrm{d}x\mathrm{d}P(\omega)\\&=\int_0^\infty\int_\Omega I_{(x\leqslant X(\omega))}\mathrm{d}P(\omega)\mathrm{d}x=\int_0^\infty P(X\geqslant x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^\infty (1-F(x))\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.7}$$

推论 2.1 $E|X|<\infty$ 的充要条件是$\int_{-\infty}^0 F(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_0^\infty(1-F(x))\mathrm{d}x$ 均为有限. 这时有

$$EX=\int_0^\infty(1-F(x))\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^0 F(x)\mathrm{d}x. \tag{2.8}$$

推论 2.2 对$0<p<\infty$,$E|X|^p<\infty$的充要条件是$\sum_{n=1}^\infty P(|X|\geqslant n^{1/p})<\infty$. 它也等价于$\sum_{n=1}^\infty n^{p-1}P(|X|\geqslant n)<\infty$.

证 由定理 2.2 的证明可知,在 $X\geqslant 0$ 下,(2.6) 总成立. 由此并应用 Fubini 定理,

$$\begin{aligned}E|X|^p&=\int_0^\infty P(|X|^p\geqslant x)\mathrm{d}x=\int_0^\infty\int_\Omega I_{(|X|^p\geqslant x)}\mathrm{d}P\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega\int_0^\infty px^{p-1}I_{(|X|\geqslant x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}P\\&=p\int_0^\infty x^{p-1}P(|X|\geqslant x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此 $E|X|^p<\infty$ 当且仅当$\int_0^\infty P(|X|^p\geqslant x)\mathrm{d}x<\infty$,它也等价于$\int_0^\infty x^{p-1}P(|X|\geqslant x)\mathrm{d}x<\infty$. 而这两个积分收敛又分别等价于上述两个级数收敛.

除了数学期望和方差外,中位数也是随机变量的一个重要数字特征. 数 mX 称为 r. v. X 的**中位数**,若 $P(X\geqslant mX)\geqslant\frac{1}{2}$ 且 $P(X\leqslant mX)\geqslant\frac{1}{2}$. 一个 r. v. 的中位数总是存在的,但不一定是唯一的. 易知若$P(|X-a|<\varepsilon)>\frac{1}{2}$,则 $|mX-a|<\varepsilon$.

$M(t)=Ee^{tX}$ 称为 r. v. X 的**矩母函数**. 如果 $M(t)$ 在 $t=t_0>0$ 及 $t=-t_0$

处取有限值，那么可以证明下列性质成立：

1) 当 $|t|<t_0$ 时，$M(t)<\infty$；

2) $M(t)$ 在 $|t|\leqslant t_0$ 上是凸函数；

3) 对任意正整数 k，$E|X|^k<\infty$ 且

$$EX^k = M^{(k)}(0).$$

若 r.v. X_1 与 X_2 独立，且它们的矩母函数 $M_1(t)$ 和 $M_2(t)$ 在 $|t|<t_0$ 上有限，那么 r.v. X_1+X_2 的矩母函数为 $M_1(t)M_2(t)$.

最后介绍随机向量的数学期望的概念. 若对随机向量 $\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ 的每一分量 X_i，数学期望 EX_i 存在，随机向量 $\mathbf{X}$ 的**数学期望** $E\mathbf{X}$ 就定义作向量 $(EX_1,\cdots,EX_n)$.

设 $g(\cdot)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^1$ 的 Borel 可测函数，我们知道 $g(\mathbf{X})$ 是一个 r.v.，记 $\mathbf{X}$ 的 n 元 d.f. 为 $F(x_1,\cdots,x_n)$. 由积分变换可写

$$Eg(\mathbf{X}) = \int_{\mathbf{R}^n} g(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}F(x_1,\cdots,x_n).$$

记 $\sigma_{jj}=\mathrm{Var}X_j(1\leqslant j\leqslant n)$，$\sigma_{jk}=\mathrm{Cov}(X_j,X_k)=E(X_j-EX_j)(X_k-EX_k)=EX_jX_k-EX_jEX_k(j\neq k)$. 后者称为 r.v. X_j 与 X_k 的**协方差**，矩阵 $\Sigma=(\sigma_{jk})_{n\times n}$ 称为随机向量 $\mathbf{X}$ 的**协方差矩阵**. 由 Schwarz 不等式易知 $|\sigma_{jk}|\leqslant\sqrt{\sigma_{jj}\sigma_{kk}}$.

$$\rho_{jk}=\begin{cases}\sigma_{jk}/\sqrt{\sigma_{jj}\sigma_{kk}}, & \text{当 } \sigma_{jj}\sigma_{kk}\neq 0,\\ 0, & \text{当 } \sigma_{jj}\sigma_{kk}=0\end{cases}$$

称为 r.v. X_j 与 X_k 的**相关系数**. 易知 $|\rho_{jk}|\leqslant 1$，且对方差不为 0 的 r.v. X_j 和 X_k，$|\rho_{jk}|=1$ 当且仅当 X_j 与 X_k 是以概率 1 线性相关的，即有常数 $a_1\neq 0, a_2\neq 0$ 和 b，使

$$P\{a_1X_j+a_2X_k+b=0\}=1.$$

另外，称

$$M(t_1,\cdots,t_n)=E\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}t_jX_j\right\}$$

为随机向量 X 的**矩母函数**.

§3　特征函数及其性质

设 r.v. X 的 d.f. 是 $F(x)$，称 $F(x)$ 的 Fourier-Stieltjes 变换

$$f(t)=Ee^{itX}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\mathrm{d}F(x) \tag{3.1}$$

为 r.v. X 的**特征函数**(简记为 c.f.). 由定义可知 c.f. 具有下述基本性质:

1) $f(0)=1, |f(t)|\leq 1, f(-t)=\overline{f(t)}$, (3.2)

其中 $\bar{f}$ 表示 f 的复共轭.

2) $|f(t)-f(t+h)|^2\leq 2(1-\mathrm{Re}f(h))$. (3.3)

3) $f(t)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上是一致连续的.

4) $f(t)$ 具有非负定性,即对任意实数 $t_1,\cdots,t_n$ 及复数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(t_k-t_j)\lambda_k\bar{\lambda}_j\geqslant 0. \tag{3.4}$$

5) 设 $Y=aX+b$, a、b 是任意实数,则

$$f_Y(t)=\mathrm{e}^{itb}f_X(at). \tag{3.5}$$

6) 独立 r.v. $X_k(k=1,\cdots,n)$ 之和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$ 的 c.f. $f_{S_n}(t)$ 等于 X_k 的 c.f. $f_k(t)$ 之积,即

$$f_{S_n}(t)=\prod_{k=1}^{n}f_k(t)$$

(其逆不真).

7) 设 r.v. X 的 k 阶矩 $\alpha_k=EX^k$ 存在(k 为正整数),那么 $f(t)$ 是 k 次可微的,且对 $m\leqslant k$ 有

$$f^{(m)}(0)=\mathrm{i}^m\alpha_m. \tag{3.6}$$

反之,若 X 的 c.f. $f(t)$ 是 k 次可微的,当 k 为偶数时,则 $E|X|^k<\infty$;当 k 为奇数时,$E|X|^{k-1}<\infty$,但 k 阶矩未必存在.

8) 设 r.v. X 的 k 阶矩存在,k 为正实数,那么利用 Maclaurin 公式可证

$$f(t)=1+\sum_{r=1}^{[k]}\frac{\alpha_r}{r!}(\mathrm{i}t)^r+o(|t|^k)\quad(t\to 0). \tag{3.7}$$

在叙述性质 9) 之前先介绍复变函数论中的一个结果.

引理 3.1 设 $f(t)$ 是实变量复值连续函数,$f(t)\neq 0, t\in\mathbf{R}$. 那么存在连续函数 $g:\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^1$ 使得 $f(t)=|f(t)|\exp(\mathrm{i}g(t))$,或等价地,$\mathrm{Log}f(t)=\log|f(t)|+\mathrm{i}\arg f(t)$ 且 $g(t)=\arg f(t)$ 关于 t 连续.

这是 $\mathrm{Log}f$ 的一支且它与任何另一支的差是 $2k\pi\mathrm{i}$(k 是整数). 我们可以通过对 g 规定一个特殊的值来选取唯一的一支.

9) 设 r.v. X 的 k 阶矩存在,k 为正整数,那么

$$\mathrm{Log}f(t)=\sum_{l=1}^{k}\frac{\gamma_l}{l!}(\mathrm{i}t)^l+o(|t|^k)\quad(t\to 0), \tag{3.8}$$

其中 $\gamma_l=\frac{1}{\mathrm{i}^l}\left[\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l}\mathrm{Log}f(t)\right]_{t=0}$ 称为 r.v. X 的 l 阶半不变量. 易见 $\gamma_1=\alpha_1, \gamma_2=$

$\alpha_2-\alpha_1^2,\gamma_3=E(X-\alpha)^3,\cdots$.

10) $1-|f(2t)|^2\leqslant 4(1-|f(t)|^2)$. (3.9)

证 记 $G(x)$ 是一 d.f.,其对应的 c.f. 为 $g(t)$. 则

$$\mathrm{Re}(1-g(t))=\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos tx)\mathrm{d}G(x).$$

因为

$$1-\cos tx=2\sin^2\left(\frac{tx}{2}\right)\geqslant\frac{1}{4}(1-\cos 2tx),$$

所以对每一 t

$$\mathrm{Re}(1-g(2t))\leqslant 4\mathrm{Re}(1-g(t)). \tag{3.10}$$

令 $g(t)=|f(t)|^2$,即得(3.9)式.

11) 设 $f(t)$ 是非退化分布的 c.f.,则存在正常数 δ 和 ε,使当 $|t|\leqslant\delta$ 时有

$$|f(t)|\leqslant 1-\varepsilon t^2.$$

证 先设分布具有有限方差 σ^2,由分布的非退化性知 $\sigma^2>0$. 记 a 为相应的数学期望,那么 $f(t)\mathrm{e}^{-iat}$ 是期望为 0,方差为 σ^2 的 d.f. 所对应的 c.f.,所以由性质 8),当 $t\to 0$ 时

$$f(t)\mathrm{e}^{-iat}=1-\frac{\sigma^2t^2}{2}+o(t^2)$$

对充分小的 t,上式右边的模不超过 $1-\dfrac{\sigma^2t^2}{4}$. 由此可得待证的不等式.

对一般情形,设 $f(t)$ 对应的 d.f. 为 $F(x)$. 令 $c=\int_{|x|\leqslant b}\mathrm{d}F(x)$. 选 b 使得 $c>0$. 并定义函数

$$G(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\leqslant -b,\\ \dfrac{1}{c}(F(x)-F(-b)), & \text{当 } -b<x\leqslant b,\\ 1, & \text{当 } x>b.\end{cases}$$

显然 $G(x)$ 是有有限方差的非退化分布,其 c.f. 为

$$g(t)=\frac{1}{c}\int_{|x|\leqslant b}\mathrm{e}^{itx}\mathrm{d}F(x).$$

从已证部分可得对某一 δ 和 ε,当 $|t|\leqslant\delta$ 时

$$\frac{1}{c}\left|\int_{|x|\leqslant b}\mathrm{e}^{itx}\mathrm{d}F(x)\right|\leqslant 1-\varepsilon t^2.$$

显然

$$|f(t)|\leqslant\left|\int_{|x|\leqslant b}\mathrm{e}^{itx}\mathrm{d}F(x)\right|+\int_{|x|>b}\mathrm{d}F(x).$$

所以当 $|t|\leqslant\delta$ 时,$|f(t)|\leqslant c(1-\varepsilon t^2)+1-c=1-c\varepsilon t^2$.

下面我们叙述逆转公式和唯一性定理，其证明见[2,5]等.

定理 3.1（逆转公式） 设 $F(x)$ 是 d.f.，$f(t)$ 是对应的 c.f.，若 x_1 和 x_2 是 $F(x)$ 的连续点，那么

$$F(x_2)-F(x_1)=\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_2}-e^{-itx_1}}{-it}f(t)\mathrm{d}t.$$

作为这一定理的一个直接推论，有

定理 3.2 具有相同 c.f. 的两个 d.f. 是恒等的.

由此还推得下列事实：一个 r.v. X 是对称的，当且仅当它的 c.f. 是实的. 事实上，由 X 的对称性知 X 和 $-X$ 有相同的 d.f.，据定义 $f(t)=Ee^{itX}=Ee^{-itX}=f(-t)=\overline{f(t)}$. 这就是说 $f(t)$ 是实的. 反之，从

$$f(t)=\overline{f(t)}=f(-t)=Ee^{-itX}$$

知 X 和 $-X$ 的 c.f. 相等，故它们的 d.f. 恒等. 这说明 r.v. X 是对称的.

定理 3.3 设 c.f. $f(t)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上绝对可积，那么对应的 d.f. $F(x)$ 处处有连续的导数 $p(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)$，且对每一 x 有

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}f(t)\mathrm{d}t.$$

证明可参见[20].

注 绝对连续的 d.f. 对应的 c.f. 未必绝对可积. 例如 $f(t)=\frac{1}{1+|t|}$ 是不绝对可积的 c.f.，但对应的 d.f. 是绝对连续的.

现在来给出定义在 $\mathbf{R}^1$ 上的复值函数 $f(t)$ 是 c.f. 的充要条件.

定理 3.4（Bochner-Khintchine 定理） $\mathbf{R}^1$ 上复值函数 $f(t)$ 是 c.f. 的充要条件是 $f(0)=1$，$f(t)$ 连续且非负定，即对每一正整数 N，任意实数 $t_1,\cdots,t_N$ 及任意复数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_N$，有

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\lambda_j\bar{\lambda}_k f(t_j-t_k)\geqslant 0.$$

证明参见[2]或[5].

注 在理论讨论中 Bochner-Khintchine 定理是有意义的，但在具体验证一个函数是否为 c.f. 时常常无法运用它. 这时我们常用下一节的定理 4.2，或者直接指明它对应的 d.f.

最后来讨论多维 r.v. $(X_1,\cdots,X_n)$ 的 c.f.

设 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的 n 元 d.f. 为 $F(x_1,\cdots,x_n)$，我们称

$$f(t_1,\cdots,t_n)=E\exp(\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}t_kX_k)$$

为 n 维 r.v. $(X_1,\cdots,X_n)$ 的 c.f. 因此

$$f(t_1,\cdots,t_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}t_kx_k)\mathrm{d}F(x_1,\cdots,x_n).$$

类似于一维情形，也有相应的逆转公式和对应的唯一性定理.

利用多元 c.f.，可把 r.v. 的独立性用它们的 c.f. 来表达.

定理 3.5 r.v. $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立的充要条件是它的 n 维 c.f. 等于各分量的 c.f. 之乘积，即

$$f_{X_1,\cdots,X_n}(t_1,\cdots,t_n)=\prod_{j=1}^{n}f_{X_j}(t_j).$$

证明是直接的.

§4 分布函数列与特征函数列的收敛性

设 $F(x),F_n(x),n=1,2,\cdots$ 是有界不减函数. 若在 $F(x)$ 的每一连续点上有 $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)$，则称序列 $\{F_n(x)\}$ **淡收敛**于 $F(x)$. 进一步，若 $F_n(x)$ 淡收敛于 $F(x)$，而且 $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(\infty)=F(\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty}F_n(-\infty)=F(-\infty)$，则称 $F_n(x)$ **弱收敛**于 $F(x)$，记作 $F_n\xrightarrow{d}F$.

如果 r.v. 列 $\{X_n\}$ 的 d.f. $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于 r.v. X 的 d.f. $F(x)$，则称 X_n **依分布收敛**于 X，记作 $X_n\xrightarrow{d}X$.

定理 4.1(Helly Bray 定理) 设 $\{F,F_n;n\geqslant 1\}$ 是有界不减函数列，$F_n\xrightarrow{d}F$；g 是 $\mathbf{R}^1$ 上有界连续函数，那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\mathrm{d}F_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\mathrm{d}F(x).$$

定理 4.2(Lévy Cramer **连续性定理**) 设 $\{F_n;n\geqslant 1\}$ 是 d.f. 列，$\{f_n;n\geqslant 1\}$ 是对应的 c.f. 列，若有 d.f. F 使 $F_n\xrightarrow{d}F$，那么在 $|t|\leqslant T$ 中一致地有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)=f(t)$，其中 $T>0$ 是任意实数，f 是 F 对应的 c.f.

反之，若 c.f. $f_n(t)$ 收敛于某一极限函数 $f(t)$，而 $f(t)$ 在 $t=0$ 处连续，那么 f 必是某一 d.f. F 对应的 c.f.，并且有 $F_n\xrightarrow{d}F$.

注 由定理 4.2 并结合引理 3.1 可知，对于 c.f. $f_n(t)$，$f(t)$，当 $f_n(t)\to f(t)$ 时，对任给 $T>0$，在 $|t|\leqslant T$ 中一致地有

$$\mathrm{Log}f_n(t)\to\mathrm{Log}f(t).$$

定理 4.3 设 $\{F,F_n;n\geqslant 1\}$ 是 d.f. 列，$F_n\xrightarrow{d}F$，且在 F 的每一不连续点 x 上，$F_n(x)\to F(x)$，$F_n(x+0)\to F(x+0)$，那么在 $\mathbf{R}^1$ 上 F_n 一致地收敛

于 F.

特别地，当 $F(x)$ 是连续的 d.f. 时，F_n 一致地收敛于 F.

上述定理的证明可参见[9,10,18,20].

定理 4.4　设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是常数列，其中 $a_n > 0$，设 d.f. 列 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于非退化 d.f. $F(x)$，那么

(i) 若 $F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow{d} G(x)$，其中 $G(x)$ 是非退化 d.f.，那么 $G(x) = F(ax + b)$ 且 $a_n \to a, b_n \to b$. 特别地，若 $F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow{d} F(x)$，则 $a_n \to 1$，$b_n \to 0$.

(ii) 若 $a_n \to a$ 且 $b_n \to b$，则 $F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow{d} F(ax + b)$.

证　(i)　以 $f_n(t), f(t)$ 和 $g(t)$ 分别记 d.f. $F_n(x), F(x)$ 和 $G(x)$ 的 c.f.，那么 $f_n(t) \to f(t)$ 且

$$\exp\{-\mathrm{i}tb_n/a_n\} f_n(t/a_n) \to g(t).$$

正常数列 $\{a_n\}$ 有一子列 $\{a_{n'}\}$ 使得 $a_{n'} \to a$. 若 $a = \infty$，则对每一 t，有

$$|g(t)| = \lim_{n' \to \infty} |f_{n'}(t/a_{n'})| = |f(0)| = 1,$$

即 $g(t)$ 是退化分布的 c.f.，这与假设矛盾. 若 $a = 0$，那么写 $g_n(t) = \exp\{-\mathrm{i}tb_n/a_n\} f_n(t/a_n)$，则对每一 t

$$|f(t)| = \lim_{n' \to \infty} |f_{n'}(t)| = \lim_{n' \to \infty} |g_{n'}(a_{n'} t)| = |g(0)| = 1,$$

这与 $F(x)$ 是非退化分布的假设矛盾，故必有 $0 < a < \infty$. 对所有充分小的 t，函数 $g(t)$ 和 $f(t/a)$ 异于 0，所以当 $n' \to \infty$ 时

$$\exp\{-\mathrm{i}tb_{n'}/a_{n'}\} = \frac{\exp\{-\mathrm{i}tb_{n'}/a_{n'}\} f_{n'}(t/a_{n'})}{f_{n'}(t/a_{n'})}$$

$$\to \frac{g(t)}{f(t/a)} \neq 0,$$

从而 $b_{n'} \to b = -\dfrac{a}{\mathrm{i}t} \mathrm{Log} \dfrac{g(t)}{f(t/a)}$，且 $g(t) = \exp\{-\mathrm{i}tb/a\} f(t/a)$. 因此 $G(x) = F(ax + b)$. 假设存在 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n''}\}$ 满足 $a_{n''} \to a_0 \neq a$，那么 $b_{n''} \to b_0$ 且

$$\exp\{-\mathrm{i}tb/a\} f(t/a) = \exp\{-\mathrm{i}tb_0/a_0\} f(t/a_0).$$

所以对每一 t 和某正数 $c < 1$，$|f(t)| = |f(ct)|$. 因此对每一 t

$$|f(t)| = |f(ct)| = |f(c^2 t)| = \cdots = \lim_{n \to \infty} |f(c^n t)| = 1.$$

这与 $F(x)$ 的非退化性矛盾. 故 $a_n \to a$，并由此得 $b_n \to b$.

下证(ii). 设 $\varepsilon > 0$，实数 x 使得函数 $F(x)$ 在点 $ax + b, ax + b - \varepsilon$ 和 $ax + b + \varepsilon$ 处连续. 由于 $a_n x + b_n \to ax + b$，故对充分大的 n，有 $ax + b - \varepsilon \leqslant a_n x + b_n \leqslant ax + b + \varepsilon$. 所以

$$F_n(ax+b-\varepsilon)\leqslant F_n(a_nx+b_n)<F_n(ax+b+\varepsilon)$$

且

$$F(ax+b-\varepsilon)\leqslant\liminf_{n\to\infty}F_n(a_nx+b_n)$$
$$\leqslant\limsup_{n\to\infty}F_n(a_nx+b_n)\leqslant F(ax+b+\varepsilon).$$

由 ε 的任意性即得

$$F_n(a_nx+b_n)\xrightarrow{d}F(ax+b).$$

定理证毕.

现在略述 k 元 d.f. 的收敛性. 设 $F(x_1,\cdots,x_k)$ 是 $\mathbf{R}^k$ 上的 d.f.,记

$$C(F)=\{x=(x_1,\cdots,x_k):F_j(x_j)=F_j(x_j+0),j=1,\cdots,k\}.$$

定义 设$\{F,F_n;n\geqslant1\}$是 $\mathbf{R}^k$ 上的 d.f. 列,若对每一 $x\in C(F)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x),$$

就称 F_n **弱收敛**于 F,记作 $F_n\xrightarrow{d}F$.

对于多元 d.f.,也成立着类似于定理 4.1 和 4.2 的结论.这里不赘述了,有兴趣的读者可参见[2].

最后,我们来给出多元 d.f. 收敛中的著名的 Cramer Wold 方法.

定理 4.5 设$\{(X_{n1},\cdots,X_{nk});n\geqslant1\}$是 k 维随机向量列,若有 r.v. X_1, $\cdots,X_k$ 使对任给实数 $a_1,\cdots,a_k$ 都有

$$a_1X_{n1}+\cdots+a_kX_{nk}\xrightarrow{d}a_1X_1+\cdots+a_kX_k,$$

那么

$$(X_{n1},\cdots,X_{nk})\xrightarrow{d}(X_1,\cdots,X_k).$$

证 记$(X_{n1},\cdots,X_{nk})$和$(X_1,\cdots,X_k)$的c.f.为$f_n(t_1,\cdots,t_k)$和$f(t_1,\cdots,t_k)$.由假设知 $a_1X_{n1}+\cdots+a_kX_{nk}$ 的 c.f. 收敛于 $a_1X_1+\cdots+a_kX_k$ 的 c.f.,即

$$Ee^{is(a_1X_{n1}+\cdots+a_kX_{nk})}\to Ee^{is(a_1X_1+\cdots+a_kX_k)}.$$

由 $a_1,\cdots,a_k$ 的任意性,取 $s=1$ 并记 $a_j=t_j$, 就有

$$f_n(t_1,\cdots,t_k)=Ee^{i(t_1X_{n1}+\cdots+t_kX_{nk})}$$
$$\to Ee^{i(t_1X_1+\cdots+t_kX_k)}=f(t_1,\cdots,t_k).$$

由连续性定理即得$(X_{n1},\cdots,X_{nk})\xrightarrow{d}(X_1,\cdots,X_k)$.

§5 随机变量列的收敛性

5.1 几乎必然(a.s.)收敛

定义 5.1　设 $\{X, X_n; n \geq 1\}$ 是概率空间$(\Omega, \mathscr{A}, P)$上的 r.v. 如果存在集 $A \in \mathscr{A}$, $P(A) = 0$,使当 $\omega \in A^c$ 时,有$\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$,则称$\{X_n\}$**几乎必然收敛**于 X,简称$\{X_n\}$a.s. 收敛于 X,记为 $X_n \to X$ a.s.

如果存在集 $A \in \mathscr{A}$, $P(A) = 0$,使当 $\omega \in A^c$ 时,有

$$\lim_{m,n\to\infty} |X_n(\omega) - X_m(\omega)| = 0,$$

则称$\{X_n\}$是 Cauchy **几乎必然收敛**的.

定理 5.1　设$\{X, X_n; n \geq 1\}$是 r.v. 序列. $X_n \to X$ a.s. 的充要条件是$\{X_n\}$是 Cauchy a.s. 收敛的.

证　记 A 是 a.s. 收敛定义中的零测度集.

条件必要. 设 $\omega \in A^c$,则有

$$|X_m(\omega) - X_n(\omega)| \leq |X_m(\omega) - X(\omega)| + |X_n(\omega) - X(\omega)| \to 0.$$

条件充分. 记 $X(\omega) = \limsup\limits_{n\to\infty} X_n(\omega)$. 对每一 $\omega \in A^c$,由于$\{X_n(\omega)\}$是一实 Cauchy 序列,所以"limsup"可以换作"lim". 因为 $P(A) = 0$,故有 $X_n \to X$ a.s. 由测度论可知,可测函数 $X_n(\omega)$ 的极限函数 $X(\omega)$ 是可测的,所以 X 是一个 r.v.

下面我们给出 a.s. 收敛的一个判别准则.

定理 5.2　$X_n \to X$ a.s. 的充要条件是对任一 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\bigcup_{m=n}^{\infty} (|X_m - X| \geq \varepsilon)\right\} = 0. \tag{5.1}$$

证　对于 $\varepsilon > 0$,记

$$E_m(\varepsilon) = \{|X_m - X| \geq \varepsilon\}, \quad m \geq 1.$$

因

$$\{X_n \nrightarrow X, n \to \infty\} = \bigcup_{\varepsilon > 0} \limsup_{n\to\infty} E_n(\varepsilon) = \bigcup_{\varepsilon > 0} \left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m(\varepsilon)\right\},$$

所以

$$X_n \to X \text{ a.s.} \Leftrightarrow \text{对任给 } \varepsilon > 0, P\left\{\limsup_{n\to\infty} E_n(\varepsilon)\right\} = 0.$$

而

$$P\left\{\limsup_{n\to\infty} E_n(\varepsilon)\right\} = \lim_{n\to\infty} P\left\{\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m(\varepsilon)\right\},$$

于是

$$X_n \to X \text{ a.s.} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P\left\{\bigcup_{m=n}^{\infty} (|X_m - X| \geq \varepsilon)\right\} = 0.$$

推论 5.1　若对任一 $\varepsilon > 0$,有

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\} < \infty, \tag{5.2}$$

那么 $X_n \to X$ a.s.

注 5.1 我国著名数理统计学家许宝騄与(美国)Robbins 在 1947 年引进如下的**完全收敛性**概念：如果对每一 $\varepsilon > 0$，成立(5.2)式，就称 r.v. 序列 $\{X_n\}$ 完全收敛于 r.v. X. 推论 5.1 表明从完全收敛性可以推出 a.s. 收敛性.

由推论 5.1 易得

推论 5.2 设 $\{X, X_n; n \geqslant 1\}$ 是 r.v. 列，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E(X_n - X)^2 < \infty$，则 $X_n \to X$ a.s.

例 5.1 设 $\{X_n\}$ 是 r.v. 列，

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2\cdot 2^n},$$

$$P\left\{X_n = \frac{1}{n}\right\} = P\left\{X_n = -\frac{1}{n}\right\} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

对给定的 $\varepsilon > 0$，考虑 $n > \frac{1}{\varepsilon}$，有

$$P\left\{\bigcup_{m=n}^{\infty}(|X_m| \geqslant \varepsilon)\right\} \leqslant \sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{2^m} \to 0,\ n \to \infty.$$

这样按定理 5.2 可知 $X_n \to 0$ a.s.

5.2 依概率收敛

定义 5.2 设 $\{X, X_n; n \geqslant 1\}$ 是 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ 上的 r.v.，如果对每一 $\varepsilon > 0$，成立

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\} = 0, \tag{5.3}$$

则称 $\{X_n\}$ **依概率收敛**于 r.v. X，简记为 $X_n \xrightarrow{P} X$.

注 5.2 我们相应地可以定义依概率 Cauchy 收敛性，而且也可以证明它等价于依概率收敛性.

注 5.3 若 $X_n \xrightarrow{P} X$，那么极限 r.v. X 是 a.s. 唯一的. 即若 $X_n \xrightarrow{P} X$，同时 $X_n \xrightarrow{P} Y$，则 $X = Y$ a.s.

定理 5.3 若 $X_n \to X$ a.s.，则 $X_n \xrightarrow{P} X$.

这是定理 5.2 的一个推论.

注 5.4 定理 5.3 的逆一般不成立(见例 5.2). 然而，在下述特殊情形下它却成立：设 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ 是一概率空间，$\mathscr{E}$ 是定义在其上的满足如下条件的 r.v. 集，即若 X, Y 是 $\mathscr{E}$ 中两个不同的 r.v.，则 $P(X \neq Y) > 0$，那么 $\mathscr{E}$ 中任一

r.v. 列的依概率收敛性蕴含着 a.s. 收敛性的充要条件是 Ω 为可列多个互不相交的原子之并.

例 5.2 设 $\Omega=[0,1]$，$\mathscr{A}$ 是 Ω 中一切 Borel 集组成的 σ 域，P 是 Ω 上的 Lebesgue 测度. 对任意整数 k，选整数 m 使 $2^m \leqslant k < 2^{m+1}$. 显然 k 与 m 同时趋于 ∞. 现在写 $k(\geqslant 1)$ 为

$$k=2^m+n \quad (n=0,1,\cdots,2^m-1).$$

在 Ω 上定义

$$X_k(\omega)=\begin{cases}1, & \text{当 } \omega\in\left[\dfrac{n}{2^m},\dfrac{n+1}{2^m}\right), \\ 0, & \text{其他情形}.\end{cases}$$

那么 X_k 是 r.v. 且当 $0<\epsilon\leqslant 1$ 时，$P(|X_k|\geqslant\epsilon)=\dfrac{1}{2^m}$；当 $\epsilon>1$ 时，$P(|X_k|\geqslant\epsilon)=0$. 于是 $X_k\xrightarrow{P}0$. 但 $X_k\not\to 0$ a.s. 事实上，对任何 $\omega\in[0,1]$，有无穷多个形为 $[n/2^m,(n+1)/2^m)$ 的区间包含着 ω. 我们将这样的区间记为

$$\{[n_m/2^m,(n_m+1)/2^m);\ m=1,2,\cdots\}.$$

令 $k_m=2^m+n_m$，那么 $X_{k_m}(\omega)=1$，但当 $k\neq k_m$ 时，$X_k(\omega)=0$. 由此可见 $\{X_k\}$ 在 ω 处不收敛. 故 X_k 的 a.s. 收敛的极限不存在.

定理 5.4 (i) 设 $X_n\xrightarrow{P}X$，则必有子列 $X_{n_k}\to X$ a.s.；

(ii) 设 $X_n\xrightarrow{P}X$，则 $X_n\xrightarrow{d}X$；

(iii) $X_n\xrightarrow{d}C$ (C 为常数) 等价于 $X_n\xrightarrow{P}C$.

证明参见[2,5].

定理 5.5(Slutsky 引理) 设 $\{X_n\}$ 和 $\{Y_n\}$ 是定义在同一概率空间上的r.v. 序列. 若 $\{X_n\}$ 的 d.f. 列 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于 d.f. $F(x)$ 且 $Y_n\xrightarrow{P}0$，那么 $\{X_n+Y_n\}$ 的 d.f. 也弱收敛于 $F(x)$.

证 设 x 是 F 的连续点，易知定理的结论可由下列不等式得到：

$$\begin{aligned}P\{X_n<x-\epsilon\}-F(x)-P\{|Y_n|\geqslant\epsilon\} &\leqslant P\{X_n+Y_n<x\}-F(x) \\ &\leqslant P\{X_n<x+\epsilon\}-F(x)+P\{|Y_n|\geqslant\epsilon\}.\end{aligned}$$

5.3 平均收敛

对 $0<p<\infty$，令 $L_p=\{X: X \text{ 是 r.v. 且 } E|X|^p<\infty\}$.

定义 5.3 设 $\{X,X_n;n\geqslant 1\}$ 是 L_p 中的 r.v.，若

$$\lim_{n\to\infty}E|X_n-X|^p=0, \tag{5.4}$$

则称 r.v.列$\{X_n\}$ p 阶平均收敛于 r.v. X，简记为 $X_n \xrightarrow{L_p} X$.

易知对任一 $X \in L_p$ 及任给的 $\varepsilon > 0$，存在简单 r.v. $Y = \sum\limits_k a_k I_{A_k} \in L_p$ 使得 $E|X - Y|^p < \varepsilon$. 这就是说，对任一 p 次可积的 r.v. X 必有 p 次可积的简单 r.v.列$\{Y_n\}$ p 阶平均收敛于 X.

定理 5.6 若 $X_n \xrightarrow{L_p} X$，则 $X_n \xrightarrow{P} X$.

证明是直接的，从略.

注 5.5 $X_n \to X$ a.s. 与 $X_n \xrightarrow{L_1} X$ 不能互相推出. 在例 5.1 中，对每一 n，$E|X_n| = \frac{n}{2^n} + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \to 0$，即 $X_n \xrightarrow{L_1} 0$. 这时 $X_n \xrightarrow{L_1} 0$ 与 $X_n \to 0$ a.s. 同时成立. 但在例 5.2 中，$E|X_k| = 2^{-m} \to 0$（当 $k = 2^m + n \to \infty$），于是 $X_k \xrightarrow{L_1} 0$. 但是 $X_k \not\to 0$ a.s. 下例说明 $X_n \to 0$ a.s. 时未必成立 $X_n \xrightarrow{L_p} 0$.

例 5.3 设概率空间$(\Omega, \mathscr{A}, P)$如例 5.2，令

$$X_k = kI_{[0,1/k)}.$$

易证此时 $X_k \to 0$ a.s.，但 $E|X_k| = 1$，即 $X_k \not\xrightarrow{L_1} 0$.

应用测度论中关于极限号与积分号交换的有关定理，可得下述三个重要结论：

Lebesgue 控制收敛定理 设 $X_n \xrightarrow{P} X$，r.v. $Y \in L_1$ 使得 $|X_n| \leqslant |Y|$ a.s. $(n \geqslant 1)$，那么 $X_n, X \in L_1$ 且 $X_n \xrightarrow{L_1} X$. 这时有 $EX_n \to EX$.

单调收敛定理 设 $X_n \geqslant 0$ 且 $X_n \uparrow X$ a.s.，

(i) 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty} EX_n = EX$. 因此，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} EX_n < \infty$，则有 $X \in L_1$.

(ii) 反之，若 $X \in L_1$，则每一 $X_n \in L_1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} EX_n = EX$.

Fatou 引理 设 $X_n \in L_1 (n \geqslant 1)$ 是非负 r.v.，使得 $\liminf\limits_{n\to\infty} EX_n < \infty$，则 $X_* \stackrel{\text{def}}{=} \liminf\limits_{n\to\infty} X_n \in L_1$，且

$$EX_* \leqslant \liminf_{n\to\infty} EX_n.$$

5.4 随机变量列的一致可积性

r.v.列的一致可积性概念与种种收敛性问题的讨论有着密切的关系.

定义 5.4 称 r.v.列$\{X_n\}$是一致可积的，如果

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{n\geqslant 1} \int_{\{|X_n| \geqslant a\}} |X_n| \mathrm{d}P = 0. \tag{5.5}$$

定理 5.7 r.v.列$\{X_n\}$一致可积的充要条件是

(i) 对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon)$，使对任一 $A \in \mathscr{A}$，当 $P(A) < \delta$ 时，

对一切 n 有

$$\int_A |X_n| \mathrm{d}P < \varepsilon; \tag{5.6}$$

(ii) $\sup\limits_{n\geq 1} E|X_n| < \infty.$ $\quad$ (5.7)

证　条件充分　由(5.7)可知存在 $c < \infty$,使得 $\sup\limits_n E|X_n| \leq c$. 选 $a > c/\delta$,由 Markov 不等式得

$$P\{|X_n| \geq a\} \leq \frac{1}{a} E|X_n| \leq \frac{c}{a} < \delta \quad (n \geq 1).$$

从(5.6)式得

$$\sup_n \int_{\{|X_n| \geq a\}} |X_n| \mathrm{d}P < \varepsilon. \tag{5.8}$$

条件必要　此时对任给 $\varepsilon > 0$,存在充分大的 a 使(5.8)成立.由此可得

$$E|X_n| \leq a + \int_{\{|X_n| \geq a\}} |X_n| \mathrm{d}P < a + \varepsilon \quad (n \geq 1),$$

即(5.7)式成立. 其次,令 $\delta = \varepsilon/a$,对任给的集 A. 当 $P(A) < \delta$ 时,对一切 $n \geq 1$ 有

$$\int_A |X_n| \mathrm{d}P = \int_{A\cap\{|X_n| < a\}} |X_n| \mathrm{d}P + \int_{A\cap\{|X_n| \geq a\}} |X_n| \mathrm{d}P$$

$$\leq aP(A) + \int_{\{|X_n| \geq a\}} |X_n| \mathrm{d}P < 2\varepsilon.$$

得证(5.6)式成立. 证毕.

关于一致可积性还有两个比较有用的充分条件.

推论 5.3　设有某个 $\theta > 0$,使 $\sup\limits_n E|X_n|^{1+\theta} < \infty$,则 $\{X_n\}$ 是一致可积的.

证　由于

$$\int_{\{|X_n| \geq a\}} |X_n| \mathrm{d}P \leq a^{-\theta} E|X_n|^{1+\theta},$$

所以对任给 $\varepsilon > 0$,由 $\sup\limits_n E|X_n|^{1+\theta} = c < \infty$,可选 a 充分大使得

$$\sup_n \int_{\{|X_n| \geq a\}} |X_n| \mathrm{d}P \leq ca^{-\theta} < \varepsilon.$$

推论 5.4　设有 r.v. Y, $E|Y| < \infty$,且对任何正实数 a 满足

$$P\{|X_n| \geq a\} \leq P\{|Y| \geq a\}, \tag{5.9}$$

则 r.v. 列 $\{X_n\}$ 是一致可积的.

证　利用定理 2.2,由假设的条件

$$\int_{\{|Y| \geq a\}} |Y| \mathrm{d}P = E|Y| I_{\{|Y| \geq a\}}$$

$$= \left(\int_0^a + \int_a^\infty\right) P\{|Y|I_{(|Y|\geqslant a)} \geqslant t\}\mathrm{d}t$$

$$= aP\{|Y| \geqslant a\} + \int_a^\infty P\{|Y| \geqslant t\}\mathrm{d}t$$

$$\geqslant aP\{|X_n| \geqslant a\} + \int_a^\infty P\{|X_n| \geqslant t\}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{(|X_n|\geqslant a)} |X_n|\mathrm{d}P.$$

因为 $E|Y| < \infty$，故对任给 $\varepsilon > 0$，有 a 使 $\int_{(|Y|\geqslant a)} |Y|\mathrm{d}P < \varepsilon$. 由此即得(5.5)式成立.

注 5.6 推论 5.4 的逆不真. 如记 $A = [e,\infty)$，r.v. 族 $\{X_\lambda;\lambda \in A\}$ 的分布是

$$P(X_\lambda = \lambda) = (\lambda \ln \lambda)^{-1}, \quad P(X_\lambda = 0) = 1 - (\lambda \ln \lambda)^{-1}.$$

此时

$$\sup_{\lambda\geqslant e}\int_{(|X_\lambda|\geqslant a)} |X_\lambda|\mathrm{d}P = (\ln a)^{-1} \to 0 \quad (a \to \infty),$$

所以 $\{X_\lambda;\lambda \in A\}$ 是一致可积的. 如有 r.v. Y 使(5.9)式成立，那么

$$P\{|Y| \geqslant a\} \geqslant P\{|X_a| \geqslant a\} = \frac{1}{a\ln a},$$

此时

$$E|Y| = \int_0^\infty P(|Y| \geqslant t)\mathrm{d}t \geqslant \int_e^\infty \frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t = \infty.$$

这就是说，对一致可积 r.v. 族 $\{X_\lambda;\lambda \in A\}$，不存在 r.v. Y，$E|Y| < \infty$ 且满足(5.9)式.

利用一致可积性可给出 L_p 收敛的一个判别准则.

定理 5.8(平均收敛判别准则) 若对某 $p > 0$，r.v. 列 $\{|X_n|^p;n \geqslant 1\}$ 一致可积，且 $X_n \xrightarrow{P} X$，则 $X \in L_p$ 且

$$X_n \xrightarrow{L_p} X.$$

反之，若 $X_n \in L_p$，且 $E|X_n - X|^p \to 0$，则 $X \in L_p$，$X_n \xrightarrow{P} X$ 且 $\{|X_n|^p\}$ 一致可积.

证 条件充分 由 $X_n \xrightarrow{P} X$，存在子列 $\{X_{k_n}\}$ 使 $X_{k_n} \to X$ a.s. 由 Fatou 引理及 $\{|X_n|^p\}$ 一致可积性有

$$E|X|^p = E(\liminf_{n\to\infty}|X_{k_n}|^p) \leqslant \liminf_{n\to\infty} E|X_{k_n}|^p$$

$$\leqslant \sup_{n\geqslant 1} E|X_n|^p < \infty.$$

下证 $X_n \xrightarrow{L_p} X$. 由于 $\{|X_n|^p\}$ 是一致可积的，所以对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon)$，使当 $P(A) < \delta$ 时有

$$\sup_n E\{|X_n|^p I_A\} < \varepsilon, \quad E|X|^p I_A < \varepsilon. \tag{5.10}$$

又因 $X_n \xrightarrow{P} X$，对上述 ε, δ 和 N，使当 $n \geqslant N$ 时

$$P\{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \delta. \tag{5.11}$$

从(5.10)和(5.11)，运用 c_r 不等式，就可推得

$$\begin{aligned} E|X_n - X|^p &= E\{|X_n - X|^p (I(|X_n - X| \leqslant \varepsilon) \\ &\qquad + I(|X_n - X| > \varepsilon))\} \\ &\leqslant \varepsilon^p + c_p E\{(|X_n|^p + |X|^p) I(|X_n - X| > \varepsilon)\} \\ &\leqslant \varepsilon^p + 2c_p \varepsilon. \end{aligned}$$

这就证得 $X_n \xrightarrow{L_p} X$.

条件必要　若 $X_n \xrightarrow{L_p} X$，那么易知 $X_n \xrightarrow{P} X \in L_p$. 由 c_r 不等式有

$$\sup_n E|X_n|^p \leqslant c_p \sup_n \{E|X_n - X|^p + E|X|^p\} < \infty.$$

另一方面，对任给的 $\varepsilon > 0$ 有 N，使对一切 $n \geqslant N$ 成立 $E|X_n - X|^p < \varepsilon$. 又由 $X_n, X \in L_p$ 可得，对给定的 $\varepsilon > 0$，有 $\delta > 0$ 使当 $P(A) < \delta$ 时有

$$E|X|^p I_A < \varepsilon, \quad \max_{1\leqslant k\leqslant N} E|X_k - X|^p I_A < \varepsilon.$$

这样当 $P(A) < \delta$ 时，运用 c_r 不等式，对一切 $n \geqslant 1$ 有

$$E|X_n|^p I_A \leqslant c_p\{E|X|^p I_A + E|X_n - X|^p I_A\} \leqslant 2c_p \varepsilon.$$

利用定理 5.7 即知 $\{|X_n|^p\}$ 是一致可积的.

推论 5.5　若 $X, X_n, n \geqslant 1$ 是非负可积 r.v.，$X_n \xrightarrow{P} X$，那么下列三命题等价：

(i) $\{X_n\}$ 一致可积；

(ii) $E|X_n - X| \to 0 \quad (n \to \infty)$；

(iii) $EX_n \to EX \quad (n \to \infty)$.

证　由定理 5.7 知(i)⟺(ii)，又由

$$|EX_n - EX| \leqslant E|X_n - X|$$

知(ii)⇒(iii). 因 X 非负，$0 \leqslant (X - X_n)^+ \leqslant X$，且由 $X_n \xrightarrow{P} X$ 可知 $(X - X_n)^+ \xrightarrow{P} 0$. 这样由控制收敛定理有

$$E(X - X_n)^+ \to 0.$$

当(iii)成立时$E(X-X_n)^+\to 0$. 由此可得$E(X-X_n)^-\to 0$,从而得证$E|X_n-X|\to 0$. 即(iii)⇒(ii). 证毕.

作为推论5.5的进一步推广,我们叙述下列定理:

定理 5.9 设$\{X,X_n;n\geqslant 1\}$是r.v.列,若$X_n\xrightarrow{d}X$,那么对$\alpha>0$, $E|X_n|^\alpha\to E|X|^\alpha$的充要条件为$\{|X_n|^\alpha\}$是一致可积的.

特别,当$X,X_n,n\geqslant 1$都是非负r.v.时,若$X_n\xrightarrow{d}X$,那么$EX_n\to EX$的充要条件为r.v.列$\{X_n\}$是一致可积的.

§6 鞅的基本概念

为了引进鞅的概念,首先给出条件数学期望的定义. 设$(\Omega,\mathscr{A},P)$是一概率空间,X是定义在它上面的一个r.v.,$E|X|<\infty$,$\mathscr{G}$是$\mathscr{A}$的子σ域.

定义 6.1 可积r.v.X关于$\mathscr{G}$的**条件数学期望**是满足下列条件的r.v.Y:

(i) Y是$\mathscr{G}$可测的;

(ii) 对任意的$A\in\mathscr{G}$,

$$\int_A Y\mathrm{d}P=\int_A X\mathrm{d}P.$$

通常记Y为$E(X|\mathscr{G})$. 特别地,如果X是某一事件$C\in\mathscr{A}$的示性函数,则称Y为C关于$\mathscr{G}$的**条件概率**,记作$P(C|\mathscr{G})$.

显然,条件期望在a.s.意义下是唯一的,以后所说的条件期望总只是指它的一个代表.

从条件期望的定义出发,可以证明下列基本性质:

(i) 对任意的实数c_1,c_2,

$$E(c_1X_1+c_2X_2|\mathscr{G})=c_1E(X_1|\mathscr{G})+c_2E(X_2|\mathscr{G})\quad \text{a.s.};$$

(ii) 设Y关于$\mathscr{G}$可测,$E|XY|<\infty$,$E|X|<\infty$,则

$$E(XY|\mathscr{G})=YE(X|\mathscr{G})\ \text{a.s.};$$

(iii) 设$\mathscr{G}_1\subset\mathscr{G}_2\subset\mathscr{A}$,则

$$E[E(X|\mathscr{G}_2)|\mathscr{G}_1]=E(X|\mathscr{G}_1)=E[E(X|\mathscr{G}_1)|\mathscr{G}_2]\quad \text{a.s.}$$

设$\{X_n;n\geqslant 1\}$是均值为零的独立r.v.序列,那么它的部分和$S_n=\sum_{j=1}^n X_j$满足

$$\begin{aligned}E(S_{n+1}|X_1,\cdots,X_n)&=E(S_n+X_{n+1}|X_1,\cdots,X_n)\\&=S_n+EX_{n+1}=S_n\quad \text{a.s.},\end{aligned}$$

这一性质刻画了一大类很重要的r.v.列.

定义 6.2 设$(\Omega,\mathscr{A},P)$是一概率空间，$\{\mathscr{A}_n;n\geq 1\}$是$\mathscr{A}$的子$\sigma$域的**增序列**，即$\mathscr{A}_n\subset\mathscr{A}_{n+1}(n\geq 1)$，若 r.v. 列$\{S_n;n\geq 1\}$满足

(i) S_n关于$\mathscr{A}_n$可测(此时称$\{S_n\}$关于$\{\mathscr{A}_n\}$是**适应的**)；

(ii) $E|S_n|<\infty$；

(iii) 对任意的$m<n$，$E(S_n|\mathscr{A}_m)=S_m$ a.s.，

则称$\{S_n,\mathscr{A}_n;n\geq 1\}$为**鞅**，如果条件(iii)中的"="换作"$\geq$"(或"$\leq$")，则称$\{S_n,\mathscr{A}_n;n\geq 1\}$为**下(或上)鞅**.

当$\mathscr{A}_n$的意义明确时，我们常简写$\{S_n,\mathscr{A}_n\}$作$\{S_n\}$.

例 1 设$\{X_n;n\geq 1\}$是独立可积的 r.v. 列，$S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$. 那么，如果$EX_n=0$，$n\geq 1$，则$\{S_n,\mathscr{A}_n;n\geq 1\}$是鞅，其中$\mathscr{A}_n=\sigma(X_1,\cdots,X_n)$；如果$EX_n\geq 0(\leq 0)$，$n\geq 1$，则$\{S_n,\mathscr{A}_n;n\geq 1\}$是下(上)鞅.

例 2 设X为$(\Omega,\mathscr{A},P)$上的 r.v.，$E|X|<\infty$；$\mathscr{A}_1\subset\mathscr{A}_2\subset\cdots\subset\mathscr{A}$. 定义$S_n=E(X|\mathscr{A}_n)$，$n\geq 1$，则$\{S_n,\mathscr{A}_n;n\geq 1\}$为鞅.

引理 6.1 (i) 设$\{S_n,\mathscr{A}_n;n\geq 1\}$是下(上)鞅，$\Phi$是$\mathbf{R}^1$上的不减凸(凹)函数，满足条件$E|\Phi(S_n)|<\infty$，$n\geq 1$，则$\{\Phi(S_n),\mathscr{A}_n;n\geq 1\}$也是下(上)鞅.

(ii) 设$\{S_n,\mathscr{A}_n;n\geq 1\}$是鞅，$\Phi$是$\mathbf{R}^1$上的凸函数，满足条件$E|\Phi(S_n)|<\infty$，$n\geq 1$，则$\{\Phi(S_n),\mathscr{A}_n;n\geq 1\}$是下鞅.

证 只对(i)中的下鞅情形给出证明，其余的证明完全类似.

由关于**条件期望的** Jensen **不等式**(参见附录二，四 8)，

$$E[\Phi(S_n)|\mathscr{A}_{n-1}]\geq\Phi[E(S_n|\mathscr{A}_{n-1})]\ \text{a.s.}$$

但$E(S_n|\mathscr{A}_{n-1})\geq S_{n-1}$ a.s.，且Φ不减，故

$$E[\Phi(S_n)|\mathscr{A}_{n-1}]\geq\Phi(S_{n-1})\quad \text{a.s.}$$

证毕.

引理的重要特例有：$\Phi(x)=x^+=xI(x>0)$(情况(i))和$\Phi(x)=|x|^p$，$p\geq 1$(情况(ii)).

今后总记$\{\mathscr{A}_n;n\geq 1\}$是$\mathscr{A}$的子$\sigma$域的增序列，又记$N_\infty=\{1,2,\cdots,\infty\}$.

定义 6.3 取值于N_∞中的可测函数α称为(关于$\{\mathscr{A}_n\}$的)**停时或可选时**，如果

$$\{\alpha=n\}\in\mathscr{A}_n,\quad n\geq 1,$$

或者，等价地

$$\{\alpha\leq n\}\in\mathscr{A}_n,\quad n\geq 1.$$

设 α 为一停时，记 $\mathscr{A}_\infty = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n$，它表示包含 $\{\mathscr{A}_n; n \geqslant 1\}$ 的最小 σ 域. 令

$$\mathscr{A}_\alpha = \{E: E \in \mathscr{A}_\infty, E \cap \{\alpha = n\} \in \mathscr{A}_n, n \geqslant 1\},$$

称 $\mathscr{A}_\alpha$ 为 α 前 σ 域.

若 $\{S_n\}$ 关于 $\{\mathscr{A}_n\}$ 是适应的，易知 $S_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{n\to\infty} S_n$ 关于 $\mathscr{A}_\infty$ 是可测的，因此 S_α 关于 $\mathscr{A}_\alpha$ 可测. 事实上，对于任一直线上的 Borel 集 B，事件

$$\{S_\alpha \in B\} = \bigcup_{k \in N_\infty} (\{S_k \in B\} \cap \{\alpha = k\}) \in \mathscr{A}_\infty,$$

$$\{S_\alpha \in B\} \cap \{\alpha = n\} = \{S_n \in B\} \cap \{\alpha = n\} \in \mathscr{A}_n.$$

因此 $\{S_\alpha \in B\} \in \mathscr{A}_\alpha$.

引理 6.2 设 $\{S_n, \mathscr{A}_n\}$ 为鞅（下鞅），α 和 β 是两个有界停时，且 $\alpha \leqslant \beta$，则有

$$E(S_\beta | \mathscr{A}_\alpha) = S_\alpha (\geqslant S_\alpha) \text{ a.s.}$$

证 只对下鞅给出证明. 令 $\Lambda \in \mathscr{A}_\alpha$，$\Lambda_j = \Lambda \cap \{\alpha = j\} \in \mathscr{A}_j$. 则对 $k \geqslant j$，

$$\Lambda_j \cap \{\beta > k\} \in \mathscr{A}_k.$$

由下鞅的定义可得

$$\int_{\Lambda_j \cap \{\beta > k\}} S_k \mathrm{d}P \leqslant \int_{\Lambda_j \cap \{\beta > k\}} S_{k+1} \mathrm{d}P.$$

因此

$$\int_{\Lambda_j \cap \{\beta \geqslant k\}} S_k \mathrm{d}P \leqslant \int_{\Lambda_j \cap \{\beta = k\}} S_k \mathrm{d}P + \int_{\Lambda_j \cap \{\beta > k\}} S_{k+1} \mathrm{d}P,$$

即

$$\int_{\Lambda_j \cap \{\beta \geqslant k\}} S_k \mathrm{d}P - \int_{\Lambda_j \cap \{\beta \geqslant k+1\}} S_{k+1} \mathrm{d}P \leqslant \int_{\Lambda_j \cap \{\beta = k\}} S_\beta \mathrm{d}P.$$

设 m（正整数）是 β 的一个上界，将上式对 k 从 j 到 m 求和并在 Λ_j 上用 S_α 代换 S_j，得

$$\int_{\Lambda_j \cap \{\beta \geqslant j\}} S_\alpha \mathrm{d}P - \int_{\Lambda_j \cap \{\beta \geqslant m+1\}} S_{m+1} \mathrm{d}P \leqslant \int_{\Lambda_j \cap \{j \leqslant \beta \leqslant m\}} S_\beta \mathrm{d}P,$$

即

$$\int_{\Lambda_j} S_\alpha \mathrm{d}P \leqslant \int_{\Lambda_j} S_\beta \mathrm{d}P.$$

将它对 j 从 1 到 m 求和，即得待证的结论.

上面介绍了参数为自然数集 N_∞ 的离散时间鞅的概念，下面我们将鞅的概念推广到连续时间，即参数集 $T = [0, a] (a \leqslant \infty)$ 的情形.

定义 6.2′ 设$(\Omega,\mathscr{A},P)$是一概率空间，$\{\mathscr{A}_t;t\in T\}$是$\mathscr{A}$的子σ域族，对任意的$t_1,t_2\in T$，$t_1<t_2$有$\mathscr{A}_{t_1}\subset\mathscr{A}_{t_2}$，如果r.v.族$\{S_t;t\in T\}$满足

(i) S_t关于$\mathscr{A}_t$可测；

(ii) $E|S_t|<\infty$；

(iii) 对任意的$t_1<t_2$，$t_1,t_2\in T$，$E(S_{t_2}|\mathscr{A}_{t_1})=S_{t_1}$ a.s.，

则称$\{S_t,\mathscr{A}_t;t\in T\}$为**鞅**. 如果条件(iii)中的"="换作"$\geqslant$"(或"$\leqslant$")，则称$\{S_t,\mathscr{A}_t;t\in T\}$为**下(或上)鞅**.

取值于T的可测函数α称为关于$\{\mathscr{A}_t;t\in T\}$的**停时**，如果对一切$t\in T$，有

$$\{\alpha\leqslant t\}\in\mathscr{A}_t.$$

具有指标集N_+的鞅的基本性质一般都可推广到指标集为$T=[0,a]$ $(a\leqslant\infty)$的鞅上去.

为了证明关于鞅的极限定理，需要若干基本不等式. 下面的不等式是Kolmogorov不等式的推广.

引理 6.3 (i) 设$\{S_n;n\geqslant1\}$是下鞅，则对任一实数λ，

$$\lambda P\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}S_j>\lambda\}\leqslant E\{S_nI(\max_{1\leqslant j\leqslant n}S_j>\lambda)\}.$$

(ii) 设$\{S_n;n\geqslant1\}$是鞅，则对任给的$p\geqslant1$和$\lambda>0$，

$$\lambda^pP\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j|>\lambda\}\leqslant E|S_n|^p.$$

证 记$A=\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j|>\lambda\}=\bigcup_{j=1}^n\{S_j>\lambda,\max_{1\leqslant i<j}S_i\leqslant\lambda\}\stackrel{\text{def}}{=}\bigcup_{j=1}^nA_j$. 事件$A_j\in\mathscr{A}_j$且两两不相交. 于是

$$\begin{aligned}\lambda P(A)&\leqslant\sum_{j=1}^nE[S_jI_{A_j}]\leqslant\sum_{j=1}^nE[E(S_n|\mathscr{F}_j)I_{A_j}]\\&=\sum_{j=1}^nE[E(S_nI_{A_j}|\mathscr{F}_j)]=\sum_{j=1}^nE[S_nI_{A_j}]\\&=E[S_nI_A].\end{aligned}$$

这就证明了(i). 由(i)及引理6.2即得(ii).

引理 6.4(Doob 不等式) 设$\{S_n,n\geqslant1\}$是鞅，则对于$p>1$有

$$E(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j|)^p\leqslant q^pE|S_n|^p,$$

其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

证 由引理1.1(i)和Hölder不等式

$$E(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j|)^p=p\int_0^\infty x^{p-1}P\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j|>x\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant p\int_0^\infty x^{p-2}E[|S_n|I(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j|>x)]\mathrm{d}x$$
$$=pE\left[|S_n|\int_0^{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j|}x^{p-2}\mathrm{d}x\right]$$
$$=q(E[|S_n|(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j|)^{p-1})]$$
$$\leqslant q(E|S_n|^p)^{1/p}(E(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j|^p))^{1/q}.$$

由此即得待证的不等式.

设$\{S_n,\mathscr{F}_n;n\geqslant 1\}$是下鞅,$-\infty<a<b<\infty$,令$S_0=0$.考察$\{S_0,S_1,\cdots,S_n\}$.对每一给定的$\omega$,定义

$$\tau_1(\omega)=\min\{i;1\leqslant i\leqslant n,S_i(\omega)\leqslant a\},$$
$$\tau_2(\omega)=\min\{i;\tau_1(\omega)<i\leqslant n,S_i(\omega)\geqslant b\},$$
$$\tau_3(\omega)=\min\{i;\tau_2(\omega)<i\leqslant n,S_i(\omega)\leqslant a\},$$
$$\cdots\cdots$$
$$m=\max\{i;\tau_i\text{ 有定义}\}.$$

此时最多可定义到$\tau_m(\omega)$.若$\tau_1(\omega)$也无法定义(即右边集是空集)时,就令$m=0,\tau_1(\omega)=\cdots=\tau_n(\omega)=n$.一般,若$\tau_1(\omega),\cdots,\tau_m(\omega)(1\leqslant m\leqslant n)$可依上法定义,而$\tau_{m+1}$不能时,就令$\tau_{m+1}(\omega)=\cdots=\tau_n(\omega)=n$.易见$\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n$是r.v. 设$S_{i-1}(\omega)>a,S_i(\omega)\leqslant a$,当$i\leqslant k<j-1$时,$S_k(\omega)<b,S_j(\omega)\geqslant b$.那么由$S_i(\omega)$至$S_j(\omega)$的历程称为上穿区间$[a,b]$一次.若以$\nu(\omega)=\nu(a,b,n;\omega)$表示$\{S_j(\omega);1\leqslant j\leqslant n\}$上穿$[a,b]$的次数,它也是r.v.,且有

引理 6.5(上穿不等式)

$$(b-a)E\nu(a,b,n)\leqslant E(S_n-a)^+-E(S_1-a)^+. \tag{6.1}$$

证 由引理6.3,$\{(S_n-a)^+;n\geqslant 1\}$是下鞅.序列$\{S_n\}$上穿$[a,b]$的次数等于$\{(S_n-a)^+;n\geqslant 1\}$上穿$[0,b-a]$的次数.因此,我们只需对非负下鞅$\{S_n\}$上穿$[0,b]$的次数$\nu$证明

$$bE(\nu)\leqslant E(S_n-S_1). \tag{6.2}$$

令$\tau_0\equiv 1,\tau_1=\min\{j;S_j=0\}$,

$$\tau_{2i}=\min\{j;\tau_{2i-1}<j\leqslant n,S_j\geqslant b\}\ (i\geqslant 1),$$
$$\tau_{2i-1}=\min\{j;\tau_{2i-2}<j\leqslant n,S_j=0\}\ (i\geqslant 2).$$

对于$i>m$定义$\tau_i=n$,所以$\tau_n=n$,且

$$S_n-S_1=\sum_{i=0}^{n}(S_{\tau_{i+1}}-S_{\tau_i})=\sum_{i\text{偶}}+\sum_{i\text{奇}}. \tag{6.3}$$

假设i是奇数,若$i<m$,则

$$S_{\tau_{i+1}} \geqslant b > 0 = S_{\tau_i};$$

若 $i = m$,则

$$S_{\tau_{i+1}} = S_n \geqslant 0 = S_{\tau_i};$$

若 $i > m$,则

$$S_{\tau_{i+1}} = S_n = S_{\tau_i}.$$

因此

$$\sum_{i奇}(S_{\tau_{i+1}} - S_{\tau_i}) \geqslant \sum_{i奇,i<m}(S_{\tau_{i+1}} - S_{\tau_i}) \geqslant [m/2]b = \nu b. \qquad (6.4)$$

易知 r.v. $\tau_j(1 \leqslant j \leqslant n)$ 是停时,且它们关于 j 是不减的. 所以由引理 6.2

$$E(S_{\tau_{i+1}} - S_{\tau_i}) \geqslant 0.$$

因此

$$E\Big\{\sum_{i偶}(S_{\tau_{i+1}} - S_{\tau_i})\Big\} \geqslant 0.$$

这样结合(6.3)及(6.4)式即得待证的(6.2)式.

利用上穿不等式还可给出引理 6.3 中不等式的一个补充.

引理 6.6 设 $\{S_0 = 0, S_1, \cdots, S_n\}$ 是鞅,那么对任一正数 c,

$$P\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j| > 2c\} \leqslant P(|S_n| > c) + \int_{\{|S_n| \geqslant 2c\}}(c^{-1}|S_n| - 2)\mathrm{d}P$$

$$\leqslant \int_{\{|S_n| > c\}} c^{-1}|S_n|\mathrm{d}P. \qquad (6.5)$$

证 记 $A_n = \{\min_{1\leqslant j\leqslant n} S_j < -2c\}$,用 ν_1 记 $S_0, S_1, \cdots, S_n$ 上穿区间 $[-2c, -c]$ 的次数. 我们有

$$P(A_n) = P(A_n, S_n \geqslant -c) + P(A_n, S_n < -c)$$

$$\leqslant P(\nu_1 \geqslant 1) + P(S_n < -c). \qquad (6.6)$$

类似地,若记 $B_n = \{\max_{0\leqslant j\leqslant n} S_j > 2c\}$,用 ν_2 记 $-S_0, -S_1, \cdots, -S_n$ 上穿 $[-2c, -c]$ 的次数,也有

$$P(B_n) \leqslant P(\nu_2 \geqslant 1) + P(S_n > c). \qquad (6.7)$$

因 $P(\nu_i \geqslant 1) \leqslant E\nu_i (i = 1,2)$,且由上穿不等式可知

$$E\nu_1 + E\nu_2 \leqslant \int_{\{|S_n| \geqslant 2c\}}(c^{-1}|S_n| - 2)\mathrm{d}P,$$

所以结合(6.6),(6.7)式即得

$$P\Big\{\max_{0\leqslant j\leqslant n}|S_j| > 2c\Big\} \leqslant P(A_n) + P(B_n)$$

$$\leqslant E\nu_1 + E\nu_2 + P(|S_n| > c)$$

$$\leqslant P(|S_n| > c) + \int_{|S_n| \geqslant 2c} (c^{-1}|S_n| - 2)\mathrm{d}P.$$

得证(6.5)中第一个不等式成立. 而上式右边不超过

$$\int_{|S_n| > c} \mathrm{d}P + \int_{|S_n| \geqslant 2c} (c^{-1}|S_n| - 2)\mathrm{d}P \leqslant \int_{|S_n| \geqslant c} c^{-1}|S_n|\mathrm{d}P.$$

证毕.

现在我们利用上穿不等式来证明鞅收敛定理,它是鞅论的基本结果之一.

定理 6.1　设$\{S_n,\mathscr{F}_n;n \geqslant 1\}$是下鞅,且$\sup\limits_n E|S_n| < \infty$,则$S_n$ a.s. 收敛于一个 r.v. S,满足$E|S| < \infty$.

证　记引理 6.5 中的$\nu(a,b,n)$为ν_n,$\nu_\infty = \lim\limits_{n\to\infty}\nu_n$(有限或无穷). 由上穿不等式及假设$\sup\limits_n E|S_n| < \infty$可得

$$(b-a)E\nu_\infty \leqslant \sup_n E|S_n| + |a| < \infty.$$

因此对任意的数对$a < b$都有$\nu_\infty < \infty$ a.s.,从而

$$P\left\{\liminf_{n\to\infty} S_n < a < b < \limsup_{n\to\infty} S_n\right\} = 0.$$

将上面概率中的事件对所有的有理数对a、b作并,得

$$P\left\{\liminf_{n\to\infty} S_n < \limsup_{n\to\infty} S_n\right\} = 0.$$

这就是说S_n a.s. 收敛,设它们的极限 r.v. 为S. 由 Fatou 引理

$$E|S| = E(\lim_{n\to\infty}|S_n|) < \sup_n E|S_n| < \infty.$$

证毕.

推论 6.1　一致有界鞅(或下鞅、或上鞅)a.s. 收敛;正上鞅或负下鞅也 a.s. 收敛.

定理 6.2　设$\{S_n,\mathscr{F}_n;n \geqslant 1\}$是下鞅,那么关于它的下列三个命题等价:

(i)　一致可积;

(ii) L_1收敛;

(iii) a.s. 收敛于S_∞,$E(S_\infty|\mathscr{F}_n) \geqslant S_n$且$\lim\limits_{n\to\infty}ES_n = ES_\infty$.

证　(i)⇒(ii). 这时因定理 6.1 的条件被满足,所以存在S_∞使$S_n \to S_\infty$ a.s.,利用一致可积性,由定理 5.8 即知$S_n \xrightarrow{L_1} S_\infty$.

(i)⇒(iii). 设$S_n \xrightarrow{L_1} S_\infty$. 这时$E|S_n| \to E|S_\infty| < \infty$. 因此由定理 6.1 有$S_n \to S_\infty$ a.s.,对任一$\Lambda \in \mathscr{F}_n$和$n > n'$,我们有

$$\int_\Lambda S_n\mathrm{d}P \leqslant \int_\Lambda S_{n'}\mathrm{d}P.$$

由 L_1 收敛性，当 $n'\to\infty$ 时，上式右边收敛于 $\int_\Lambda S_\infty \mathrm{d}P$. 因此

$$\int_\Lambda S_n \mathrm{d}P \leqslant \int_\Lambda S_\infty \mathrm{d}P.$$

这就证明了 $S_n \leqslant E(S_\infty|\mathscr{F}_n)$.

(iii)⇒(i). 这时由 $S_n \leqslant E(S_\infty|\mathscr{F}_n)$ 和 Jensen 不等式有 $S_n^+ \leqslant E(S_\infty^+|\mathscr{F}_n)$. 故对任给的 $\lambda>0$,

$$\int_{\{S_n^+>\lambda\}} S_n^+ \mathrm{d}P \leqslant \int_{\{S_n^+>\lambda\}} S_\infty^+ \mathrm{d}P.$$

这就是说 $\{S_n^+\}$ 是一致可积的. 因为 $S_n^+\to S_\infty^+$ a.s., 故 $ES_n^+\to ES_\infty^+$. 由假设 $ES_n\to ES_\infty$, 又有 $ES_n^-\to ES_\infty^-$. 由此及 $S_n^-\to S_\infty^-$ a.s., 按推论 5.5 可得 $\{S_n^-\}$ 是一致可积的, 因此 $\{S_n\}$ 一致可积. 证毕.

习　题

1. 设 r.v. X 的 d.f. 为 $F(x)$，试求 $Y=F(X)$ 的分布.

2. 试给出一个奇异型 d.f. $F(x)$，并求其 c.f. $f(t)$.

3. 设 r.v. X,Y 独立且 X 与 Y 至少有一个具有概率密度函数，试证 $X+Y$ 也有概率密度函数，即 $X+Y$ 的 d.f. 是绝对连续的. 当 X 与 Y 不独立时又如何？

4. 设 $EX^2<\infty$, a 是实数，令

$$Y=\begin{cases} X, & \text{当 } X<a, \\ a, & \text{当 } X>a. \end{cases}$$

试证：$\mathrm{Var}Y \leqslant \mathrm{Var}\,X$.

5. 试证：(i) $\sum_{n=1}^{\infty}P(|X|\geqslant n)\leqslant E|X|\leqslant 1+\sum_{n=1}^{\infty}P(|X|\geqslant n)$. 由此，r.v. X 的数学期望存在当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty}P(|X|\geqslant n)<\infty$.

(ii) 若 r.v. X 只取正整数值，那么 $EX=\sum_{n=1}^{\infty}P(X\geqslant n)$,

$$\mathrm{Var}X=2\sum_{n=1}^{\infty}nP(X\geqslant n)-EX(EX+1).$$

6. 设 $EX^2=1$ 且 $E|X|\geqslant a>0$，试证对 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 有

$$P(|X|\geqslant\lambda a)\geqslant(1-\lambda)^2a^2.$$

7. 设 $\{X_n\}$ 是 i.i.d. r.v. 列，$E|X_1|<\infty$，试证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}E(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|X_j|)=0.$$

(提示:对 $E(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|X_j|)$ 利用定理 2.2.)

8. 试证:若 r.v. X 满足 $|X|\leqslant 1$ a.s.,那么对任给的 $\epsilon>0$ 有

$$P(|X|\geqslant\epsilon)\geqslant EX^2-\epsilon^2.$$

9. 设(X,Y)是二维正态随机变量,$EX=EY=0$,$\mathrm{Var}X=\mathrm{Var}Y=1$,$X$ 与 Y 的协方差 $\sigma_{XY}=\rho$. 试证 X^2 与 Y^2 独立的充要条件是 $\rho=0$.

10. 设 $f(t)$ 是 r.v. X 的 c.f.,试证

$$\lim_{t\to0}\frac{2-f(t)-f(-t)}{t^2}=EX^2.$$

由此可得 $EX^2<\infty$ 当且仅当 $f(t)$ 是二次可微的.

11. 设

$$f(t)=\begin{cases}1-\dfrac{t}{2\mathrm{e}}, & 0\leqslant t<\mathrm{e},\\[2mm] \dfrac{1}{2\ln t}, & t>\mathrm{e},\end{cases}$$

且 $f(t)=f(-t)$,试证 f 是绝对连续 d.f. 的 c.f.

12. 设 r.v. X,Y 的 d.f. 分别为 F 和 G,且 $P\{|X-Y|\geqslant\epsilon\}<\epsilon$. d.f. F 和 G 的 Lévy 距离定义为

$$d(F,G)=\inf\{h:h\geqslant0,F(x-h)-h\leqslant G(x)\leqslant F(x+h)+h\}.$$

试证 $d(F,G)\leqslant\epsilon$.

13. 设$\{F,F_n;n\geqslant1\}$是 d.f. 列,试证 $F_n\xrightarrow{d}F$ 当且仅当 $d(F_n,F)\to0$.

14. 设$\{p(x),p_n(x);n\geqslant1\}$是概率密度函数列,若除去一 Lebesgue 测度为 0 的集外,对所有实数 x 成立着 $p_n(x)\to p(x)$,则对 $\mathbf{R}^1$ 上任何 Borel 集 A 一致地有

$$\int_A p_n(x)\mathrm{d}x\to\int_A p(x)\mathrm{d}x.$$

15. 设 r.v. 列$\{X_n\}$满足 $X_1>X_2>\cdots>0$ a.s.,那么由 $X_n\xrightarrow{P}0$ 可推出 $X_n\to0$ a.s.

16. 若对一切 n,$|X_n|\leqslant C$,且 r.v. $X_n\xrightarrow{P}X$,则对任一 $p>0$ 有

$$X_n\xrightarrow{L_p}X.$$

17. 假设 F_n 是 k 维 r.v. $(X_{n1},\cdots,X_{nk})(n=1,2,\cdots)$ 的联合分布,$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$ 是 k 维实值向量,$F_{n\lambda}$ 是 $\lambda_1X_{n1}+\cdots+\lambda_kX_{nk}$ 的分布. 那么 F_n 弱收敛于一

k 维 d.f.的充要条件是对任一 k 维向量 λ,$F_{n\lambda}$ 都弱收敛.

18. 若 r.v.列 $\{X_n;n\geq 1\}$ 一致可积,那么 $\{S_n/n;n\geq 1\}$ 也是一致可积的.特别,当 $\{X_n\}$ 是 i.i.d.r.v.列时,若 $E|X_1|<\infty$,则 $\{S_n/n;n\geq 1\}$ 一致可积.

19. 设 $\{S_n;n\geq 1\}$ 是下鞅,$\sup\limits_{n\geq 1} ES_n^+<\infty$,证明

$$\sup_{n\geq 1} E|S_n|<\infty.$$

20. $\{S_n,\mathscr{F}_n\}$ 是一下鞅当且仅当存在一个鞅 $\{S_n',\mathscr{F}_n\}$ 和一个正的增 r.v.列 $\{S_n''\}$ 使得 $S_n=S_n'+S_n''$.

21. 设 $\{X_n\}$ 是一列 r.v.,$X_n\to X$ a.s.且存在可积 r.v.Y 使得对每个 $n\geq 1$,$|X_n|\leqslant Y$. 如果 $\{\mathscr{F}_n\}$ 是一列递增的 σ 域,试证 $E(X_n|\mathscr{F}_n)\to E(X|\mathscr{F})$ a.s.,其中 $\mathscr{F}=\sigma\left\{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n\right\}$.

第二章　无穷可分分布与普适极限定理

正如 Kolmogorov 所说，概率论的意义在于描述由大量随机因素影响所表现出来的规律性. 换句话说，研究随机变量和的极限对于搞清楚随机现象的本质有着极其重要的价值. 从本章起我们将着重介绍关于独立随机变量和极限理论的一些经典结果和最近的研究进展.

首先讨论极限理论的一般问题. 考察如下的 r.v. 组列

$$
\begin{array}{cccc}
X_{11}, & X_{12}, & \cdots, & X_{1k_1}, \\
X_{21}, & X_{22}, & \cdots, & X_{2k_2}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
X_{n1}, & X_{n2}, & \cdots, & X_{nk_n}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}
$$

假设 $\{X_{nk}\}$ 的每一组内的 r.v. 是相互独立的(今后简称这样的 r.v. 组列为**独立 r.v. 组列**)，且设 $k_n \to \infty$(当 $n \to \infty$). 我们要求讨论形如

$$S_n = \sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}$$

的行和，当 $n \to \infty$ 时的极限分布族是什么?收敛于极限分布族中某一给定分布的条件是怎样的?

为回答第一个问题，在 §1 中引入无穷可分分布函数与无穷可分特征函数的概念，并给出无穷可分特征函数的典型表示.

另外，为了使上述问题的讨论有意义，我们需要引入无穷小条件，这意味着当 $n \to \infty$ 时，S_n 中每一项所起的作用都很微小，没有作用特殊显著的项. 在 §2 中，我们证明如果独立 r.v. 组列 $\{X_{nk}\}$ 满足无穷小条件，那么 S_n 的所有可能的极限分布恰是无穷可分分布全体，并给出 S_n 依分布收敛于一个给定的无穷可分分布的充要条件. §3 讨论由独立 r.v. 列 $\{X_n\}$ 所产生的三角组列情形，给出 L 族和稳定分布族的完整刻画.

对于具体的极限分布，我们仅在 §4 中限于讨论向正态分布收敛的中心

极限定理.许多经典结果可由 §2 中的普适极限定理推出.收敛于标准正态分布的一致速度将在 §5 中给出.最后还将对非一致估计与大偏差定理作一简单介绍.

§1　无穷可分分布函数

1.1　无穷可分分布函数的定义

定义 1.1　称 c.f. $f(t)$ **是无穷可分的**(i.d.),若对每一正整数 n,存在 c.f. $f_n(t)$,使得

$$f(t)=[f_n(t)]^n.$$

无穷可分 c.f. $f(t)$ 所对应的 d.f. $F(x)$ 称为无穷可分 d.f.,即对每一正整数 n,存在 d.f. $F_n(x)$ 使得 $F=F_n^{*n}$,其中 F_n^{*n} 表示 F_n 的 n 重卷积.

例 1.1　下述常见的分布是无穷可分的:

(i) 具有唯一跳跃点 c 的退化分布,其对应的 c.f.

$$f(t)=e^{ict}=(e^{i\frac{c}{n}t})^n;$$

(ii) 具有参数为 μ 及 σ^2 的正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,其对应的 c.f.

$$f(t)=\exp\{i\mu t-\sigma^2t^2/2\}=\left[\exp\left\{it\frac{\mu}{n}-\frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{t^2}{2}\right\}\right]^n;$$

(iii) 参数为 $\lambda(>0)$ 的 Poisson 分布,其对应的 c.f.

$$f(t)=\exp\{\lambda(e^{it}-1)\}=\left[\exp\left\{\frac{\lambda}{n}(e^{it}-1)\right\}\right]^n;$$

(iv) Cauchy 分布,它的密度函数 $p(x)=\frac{a}{\pi}\cdot\frac{1}{a^2+x^2}$　$(a>0)$,其对应的 c.f.

$$f(t)=e^{-a|t|}=(e^{-a|t|/n})^n;$$

(v) Γ 分布,它的密度函数 $p(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}$, $x\geqslant 0$,其中参数 $\alpha>0$, $\beta>0$,其对应的 c.f.

$$f(t)=\left(1-\frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha}=\left[\left(1-\frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha/n}\right]^n.$$

1.2　无穷可分特征函数的性质

定理 1.1　设 $f(t)$, $g(t)$ 是两个 i.d.c.f.,则 $f(t)g(t)$ 也是 i.d.c.f.

证　显然 fg 是 c.f.,又对每一正整数 n,存在 c.f. $f_n(t)$ 和 $g_n(t)$ 使得 $f(t)=(f_n(t))^n$, $g(t)=(g_n(t))^n$, 而 $f_n(t)g_n(t)$ 是 c.f. 且 $f(t)g(t)=(f_n(t)g_n(t))^n$,得证 $f(t)g(t)$ 是 i.d. 的.

推论 1.1 (1) 有限多个 i.d.c.f. 的乘积是 i.d.c.f.

(2) 若 f 是 i.d.c.f.，则 $|f|$ 也是.

证 (1) 是显然的. 现证(2)，当 f 是 i.d.c.f. 时，$f(-t)=\overline{f(t)}$ 也是 i.d.c.f.，所以 $|f(t)|^2$ 是 i.d. 的，故对每一正整数 n，有实的 c.f. $f_n(t)$ 使 $|f(t)|^2=(f_n(t))^{2n}$. 由此 $|f(t)|=(f_n(t))^n$，所以 $|f(t)|$ 是 i.d. 的.

定理 1.2 设 $f(t)$ 是 i.d.c.f.，则对每一 t，$f(t)\neq 0$.

证 对每一正整数 n 有 c.f. $f_n(t)$ 使 $f=f_n^n$. 而 $g=|f|^2$ 和 $g_n=|f_n|^2$ 是实 c.f. 且 g 是 i.d. 的，故 g 有唯一的 n 次正实根 $g^{1/n}=g_n$. 因为 $0\leqslant g<1$，所以

$$h(t)\overset{\text{def}}{=}\lim_{n\to\infty}g_n(t)=\begin{cases}1 & \text{当 } g(t)>0 \text{ 时},\\ 0 & \text{当 } g(t)=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

又 $g(0)=1$，故 $h(0)=1$. 由于 $g(t)$ 连续，所以在 $t=0$ 的某邻域中 $h(t)$ 均为 1. 这样由第一章定理 4.2 知 $h(t)$ 是 c.f. 由 $h(t)$ 的连续性，对任一 t，$h(t)=1$. 由此得 g，进而 f，无处为 0.

定理 1.3 设 i.d.c.f. 列 $\{f^{(m)}(t);m=1,2,\cdots\}$ 收敛于某 c.f. $f(t)$，则 $f(t)$ 是 i.d. 的.

证 记 $(f^{(m)}(t))^{1/n}=\exp\left\{\dfrac{1}{n}\operatorname{Log}f^{(m)}(t)\right\}$. 由 Log 的定义，$\operatorname{Log}f^{(m)}(0)=0$. 对任一固定的 n，当 $m\to\infty$ 时，有 $(f^{(m)}(t))^{1/n}\longrightarrow(f(t))^{1/n}$. 由于 $f^{(m)}(t)$ 是 i.d. 的，所以对每一 n，$(f^{(m)}(t))^{1/n}$ 是 c.f.，而 $(f(t))^{1/n}$ 在 $t=0$ 处连续，由第一章定理 4.2 可知 $(f(t))^{1/n}$ 是 c.f.，所以 $f(t)=\{(f(t))^{1/n}\}^n$ 是 i.d.c.f.

定义 1.2 c.f. $f(t)$ 称为 Poisson 型的，若

$$f(t)=\exp\{i\alpha t+\lambda(e^{i\beta t}-1)\},$$

其中 $\lambda\geqslant 0$，α、β 是实数.

定理 1.4 c.f. $f(t)$ 是 i.d. 的当且仅当它是有限多个 Poisson 型 c.f. 的乘积的极限.

证 显然条件是充分的. 反之，若 f 是 i.d.c.f.，此时在 $\mathbf{R}^1$ 上 $\operatorname{Log}f$ 存在且有限，又有

$$f^{\frac{1}{n}}=\exp\left\{\frac{1}{n}\operatorname{Log}f\right\}=1+\frac{1}{n}\operatorname{Log}f+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

于是

$$\operatorname{Log}f=\lim_{n\to\infty}n(f^{\frac{1}{n}}-1)=\lim_{n\to\infty}n(f_n-1),$$

其中 $f_n=f^{1/n}$ 是 c.f.，记其对应的 d.f. 为 F_n，则

$$\operatorname{Log}f=\lim_{n\to\infty}n\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itx}-1)dF_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{A\to\infty}n\int_{-A}^{A}(e^{itx}-1)dF_n(x).$$

令 $-A = x_{0,N} < x_{1,N} < \cdots < x_{l_N,N} = A$，$\max\limits_{1\leqslant j\leqslant l_N}(x_{j,N} - x_{j-1,N}) \to 0$（当 $N\to\infty$ 时）. 由 Riemann Stieltjes 积分的定义

$$n\int_{-A}^{A}(e^{itx}-1)dF_n(x) = \lim_{N\to\infty} n\sum_{j=1}^{l_N}(e^{itx_{j,N}}-1)\Delta F_n(x_{j,N})$$

$$= \lim_{N\to\infty} n\sum_{j=1}^{l_N}\lambda_{n,j,N}(e^{it\beta_{j,N}}-1),$$

其中 $\lambda_{n,j,N} = n\Delta F_n(x_{j,N}) = n[F_n(x_{j,N}) - F_n(x_{j-1,N})]$，$\beta_{j,N} = x_{j,N}$. 这样就得

$$f(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{A\to\infty}\lim_{N\to\infty}\prod_{j=1}^{l_N}\exp\{\lambda_{n,j,N}(e^{it\beta_{j,N}}-1)\}.$$

运用 i.d.c.f. 的上述性质，我们可以用来判定某些 c.f. 是不是 i.d. 的.

例 1.2　设 X 服从 $[-1,1]$ 上的均匀分布，它的 c.f. $f(t) = (\sin t)/t$，$t\in\mathbf{R}^1$. 易见当 $t = k\pi$ 时，$f(t) = 0$. 故由定理 1.1 知 $f(t)$ 不是 i.d. 的. 类似地，如果 X 取 ± 1 的概率各为 1/2，即 $P(X=1) = P(X=-1) = 1/2$，则它的 c.f. $f(t) = \cos t$ 也不是 i.d. 的.

例 1.3　设 $f(t)$ 是 Laplace 分布的 c.f.，即

$$f(t) = (1+t^2)^{-1},$$

于是

$$f(t) = (1+it)^{-1}(1-it)^{-1}$$

$$= [(1+it)^{-1/n}(1-it)^{-1/n}]^n.$$

由例 1.1(v) 及推论 1.1 可知 $f(t)$ 是 i.d.c.f.

例 1.4　设 $p>1$，考察 c.f.

$$f(t) = (p-1)(p-e^{it})^{-1},\quad t\in\mathbf{R}^1$$

的 i.d. 性. 注意到

$$\mathrm{Log} f(t) = \mathrm{Log}\left(1-\frac{1}{p}\right) - \mathrm{Log}(1-e^{it}/p) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{kp^k}(e^{itk}-1),$$

于是

$$f(t) = \prod_{k=1}^{\infty}\exp\left\{\frac{1}{kp^k}(e^{itk}-1)\right\}.$$

故从定理 1.4 即得 $f(t)$ 是 i.d.c.f.

1.3　无穷可分特征函数的 Lévy-Khintchine 表示

设 γ 是实的常数，$G(x)$ 是有界不减左连续函数. 我们记

$$\psi(t) = i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}dG(x). \tag{1.1}$$

为使积分号下函数 $g(t,x) = \left(e^{itx} - 1 - \dfrac{itx}{1+x^2}\right)\dfrac{1+x^2}{x^2}$ 在点 $x=0$ 处连续，

定义它在 $x=0$ 上的值为

$$\lim_{x\to 0}g(t,x)=\lim_{x\to 0}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}=-\frac{t^2}{2},$$

此时不难证明 $g(t,x)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上是有界连续的.

定理 1.5 函数 $e^{\psi(t)}$ 是 i.d.c.f.

证 对每一 $0<\varepsilon<1$,我们有

$$\int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\mathrm{d}G(x)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{it\xi_k}-1-\frac{it\xi_k}{1+\xi_k^2}\right)\frac{1+\xi_k^2}{\xi_k^2}[G(x_{k+1})-G(x_k)],\quad(1.2)$$

其中 $\varepsilon=x_0<x_1<\cdots<x_n=1/\varepsilon, x_k\leqslant\xi_k<x_{k+1}(k=0,1,\cdots,n-1)$ 且 $\max\limits_k(x_{k+1}-x_k)\to 0$. 这一和式中的每一项有形式 $ia_{nk}t+\lambda_{nk}(e^{itb_{nk}}-1)$,此处

$$\lambda_{nk}=\frac{1+\xi_k^2}{\xi_k^2}[G(x_{k+1}-G(x_k)],\quad b_{nk}=\xi_k,\quad a_{nk}=-\frac{\lambda_{nk}\xi_k}{1+\xi_k^2}.$$

因此(1.2)式是 Poisson c.f. 乘积的对数之极限. 由定理 1.4 知它是 i.d.c.f. 的对数. 让 $\varepsilon\to 0$,知

$$I_1=\int_{x>0}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\mathrm{d}G(x)$$

是 i.d.c.f. 的对数. 同理

$$I_2=\int_{x<0}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\mathrm{d}G(x)$$

也是 i.d.c.f. 的对数. 而

$$\psi(t)=I_1+I_2+i\gamma t-\frac{t^2}{2}[G(+0)-G(-0)].\qquad(1.3)$$

后两项分别是退化分布和正态分布的 c.f. 的对数,这就得证 $\exp(\psi(t))$ 是 i.d.c.f. 证毕.

事实上,每一 i.d.c.f. 的对数都可表成(1.1)的形式. 为证这一结论,不妨假设 $G(-\infty)=0$,并引入函数

$$\Lambda(x)=\int_{-\infty}^{x}\left(1-\frac{\sin y}{y}\right)\frac{1+y^2}{y^2}\mathrm{d}G(y)\qquad(1.4)$$

和

$$\lambda(t)=\psi(t)-\int_0^1\frac{\psi(t+h)+\psi(t-h)}{2}\mathrm{d}h.\qquad(1.5)$$

(1.4)中的被积函数 $A(y)\overset{\text{def}}{=}\left(1-\frac{\sin y}{y}\right)\frac{1+y^2}{y^2}$ 在 $y=0$ 的值定义作 $\frac{1}{3!}$. 这样 $A(y)$ 是非负有界连续的,因此积分(1.4)有意义,而且对一切 y,有常数 $c_1>$

$0,c_2>0$,使

$$c_1\leqslant A(y)<c_2. \tag{1.6}$$

函数 $A(x)$ 是有界不减的,$A(x)/A(+\infty)$ 是一个 d.f.

现在来讨论 $\lambda(t)$ 与 $A(x)$ 之间的关系. 我们有

$$\begin{aligned}\lambda(t)&=\int_0^1\left[\psi(t)-\frac{1}{2}(\psi(t+h)+\psi(t-h))\right]\mathrm{d}h\\&=\int_0^1\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}(1-\cos hx)\frac{1+x^2}{x^2}\mathrm{d}G(x)\mathrm{d}h.\end{aligned}$$

由于被积函数在$[0,1]\times(-\infty,\infty)$上有界连续,故从 Fubini 定理可得

$$\begin{aligned}\lambda(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}(1-\cos hx)\frac{1+x^2}{x^2}\mathrm{d}h\mathrm{d}G(x)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\mathrm{d}G(x)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}A(x).\end{aligned} \tag{1.7}$$

这就是说 $\lambda(t)/A(+\infty)$ 是 d.f. $A(x)/A(+\infty)$ 所对应的 c.f.

引理 1.1　在由(1.1)式定义的函数 $\psi(t)$ 和元素对(γ,G)之间存在着一一对应,其中 γ 是实常数,$G(x)$ 是有界不减左连续函数,且 $G(-\infty)=0$.

证　由(1.1),任一对(γ,G)唯一地确定函数 $\psi(t)$. 又任一函数 $\psi(t)$ 唯一地确定函数 $\lambda(t)$,它是一个 c.f. 的常数倍. 从(1.7)和逆转公式即知 $\lambda(t)$ 唯一地确定函数 $A(x)$. 最后,$A(x)$ 唯一地确定函数

$$G(x)=\int_{-\infty}^{x}\left(1-\frac{\sin y}{y}\right)^{-1}\frac{y^2}{1+y^2}\mathrm{d}A(y), \tag{1.8}$$

常数 γ 由 ψ 和 G 唯一地确定.

利用引理 1.1,我们将采用记号 $\psi=(\gamma,G)$.

引理 1.2　设

$$\psi_n(t)=\mathrm{i}\gamma_n t+\int_{-\infty}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}-1-\frac{\mathrm{i}tx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\mathrm{d}G_n(x), \tag{1.9}$$

其中 γ_n 是正的常数,$G_n(x)$ 是有界不减左连续函数,$G_n(-\infty)=0$ $(n=1,2,\cdots)$.

(i) 若 $\gamma_n\to\gamma$ 且 $G_n\xrightarrow{d}G$,则

$$\psi_n(t)\to\psi(t)=(\gamma,G).$$

(ii) 若 $\psi_n(t)\to\psi(t)$,其中 $\psi(t)$ 在 $t=0$ 处连续,那么存在常数 γ 和有界不减左连续函数 $G(x)$,使得 $\gamma_n\to\gamma,G_n\xrightarrow{d}G$ 且 $\psi=(\gamma,G)$.

证　引理的第一个结论从第一章定理 4.2 即得. 下面来证第二个断言.

因$\psi(t)$在$t=0$处连续,$\exp(\psi(t))$是i.d.c.f.的极限,所以后者是i.d.c.f.从定理1.2即得对每一t,$\exp(\psi(t))\neq 0$,故$|\psi(t)|$是有限的,且在任一有限区间上关于t一致地有$\psi_n(t)\to\psi(t)$.所以

$$\lambda_n(t)=\psi_n(t)-\int_0^1\frac{1}{2}(\psi_n(t+h)+\psi_n(t-h))\mathrm{d}h\to\lambda(t),$$

其中$\lambda(t)$由(1.5)确定.注意到(1.7)中与$\lambda(t)$和$\lambda_n(t)$相联系的函数$\Lambda(x)$和$\Lambda_n(x)$,利用$\lambda(t)$的连续性和第一章定理4.2,便得$\Lambda_n\to\Lambda$.此外,$\lambda_n(-\infty)=\lambda(-\infty)=0$,$\lambda_n(0)\to\lambda(0)$,且

$$\lambda_n(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\Lambda_n(x),\quad \lambda(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\Lambda(x).$$

因此有$\Lambda_n(\infty)\to\Lambda(\infty)$.这就得证$\Lambda_n\xrightarrow{d}\Lambda$.从(1.6)、(1.8)和第一章定理4.1即得$G_n(x)\to G(x)$.由同一定理,对每一$t$有

$$i\gamma_n t\longrightarrow\psi(t)-\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\mathrm{d}G(x).$$

所以存在极限$\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=\gamma$,并由引理的第一个结论可知$\psi=(\gamma,G)$.证毕.

定理1.6　函数$f(t)$是i.d.c.f.当且仅当它可表示为

$$f(t)=\exp\left\{i\gamma t+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\mathrm{d}G(x)\right\},\qquad(1.10)$$

其中γ是实常数,$G(x)$是有界不减左连续函数,且积分号下的函数在$x=0$的值定义为$-x^2/2$.

证　现在只需证明任一i.d.c.f.可以表为(1.10)的形式就够了.由定理1.2,对每一t,$f(t)\neq 0$.今考察$\operatorname{Log}f(t)$.由定理1.4的证明可知,对每一t有

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}f(t)&=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}n(e^{itx}-1)\mathrm{d}F_n(x)\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{it\int_{-\infty}^{\infty}\frac{nx}{1+x^2}\mathrm{d}F_n(x)+\int_{-\infty}^{\infty}n\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\mathrm{d}F_n(x)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\psi_n(t),\end{aligned}$$

其中$\psi_n(t)$由(1.9)式定义,且

$$\gamma_n=n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}F_n(x),\quad G_n(x)=n\int_{-\infty}^{x}\frac{y^2}{1+y^2}\mathrm{d}F_n(y).\qquad(1.11)$$

由引理1.2,从关系式$\psi_n(t)\to\operatorname{Log}f(t)$和$\operatorname{Log}f(t)$在$t=0$处连续即得,存在实数$\gamma$和有界不减左连续函数$G(x)$,使得$\gamma_n\to\gamma$,$G_n\xrightarrow{d}G$,且$\operatorname{Log}f(t)=(\gamma,G)$.证毕.

表示式(1.10)称为Lévy-Khintchine**公式**.由引理1.1和定理1.6即得:若$G(-\infty)=0$,那么i.d.c.f.$f(t)$表成(1.10)形式时其γ和$G(x)$是唯一的.

现在来看几个常见的i.d.c.f.，它们的对数表示成(1.1)形式时，其中的γ和$G(x)$是怎样的. 从例1.6的求解过程将会看到，如何运用定理1.6的证明来具体寻求γ和$G(x)$.

例1.5　(i) 设r.v. X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，试给出它的c.f. 的Lévy-Khintchine表示.

(ii) 给出Poisson分布的c.f. 的Lévy-Khintchine表示.

解　(i) 正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的c.f.

$$f(t)=\exp\{i\mu t-\sigma^2t^2/2\}.$$

直接考察(1.10)右边的Stieltjes积分，并注意到$\lim\limits_{x\to 0}g(t,x)=-t^2/2$，就有$\gamma=\mu$及

$$G(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \sigma^2, & x>0.\end{cases}$$

(ii) 设$f(t)$是Poisson分布的c.f.，则

$$\operatorname{Log} f(t)=\lambda(e^{it}-1)=i\frac{\lambda}{2}t+\lambda\left(e^{it}-1-\frac{it}{2}\right).$$

考察(1.10)右边的积分可得

$$\gamma=\frac{\lambda}{2},\quad G(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 1,\\ \dfrac{\lambda}{2}, & x>1.\end{cases}$$

例1.6　试给出Cauchy分布

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{a}{\pi}\cdot\frac{1}{a^2+y^2}\mathrm{d}y$$

的c.f. $f(t)=\exp(-a|t|)$的Levy-Khintchine表示.

解　因为$f_n(t)=\exp\left\{-\frac{a}{n}|t|\right\}$，所以

$$F_n(x)=\frac{a}{n\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{\mathrm{d}y}{(a/n)^2+y^2}=\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{nx}\frac{\mathrm{d}y}{a^2+y^2}.$$

由(1.11)知

$$\begin{aligned}G_n(x)&=n\int_{-\infty}^{x}\frac{y^2}{1+y^2}\mathrm{d}F_n(y)\\&=\int_{-\infty}^{x}\frac{a}{\pi}\frac{y^2}{(1+y^2)((a/n)^2+y^2)}\mathrm{d}y\\&\to\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}\overset{\text{def}}{=}G(x).\end{aligned}$$

把由上求得的$G(x)$代入(1.10)，并注意到$\psi(t)=\operatorname{Log} f(t)=-a|t|$，即有

$$-a|t| = \operatorname{Log} f(t) = i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,\frac{a}{\pi}\,\frac{dx}{1+x^2}$$

$$= i\gamma t - a|t|.$$

从而得 $\gamma = 0$，即 Cauchy 分布的 c.f. $f(t)$ 的对数 $\psi(t) = \operatorname{Log} f(t)$ 所对应的 $\gamma = 0$，

$$G(x) = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{dy}{1+y^2}.$$

1.4　**无穷可分特征函数的 Lévy 表示及 Kolmogorov 表示.**

对于 i.d.c.f. $f(t)$，Lévy 给出了另一种表示. 令 $\sigma^2 = G(+0) - G(-0)$，

$$L(x) = \begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{1+y^2}{y^2}dG(y), & x<0,\\[2ex] \displaystyle-\int_{x}^{\infty}\frac{1+y^2}{y^2}dG(y), & x>0.\end{cases} \tag{1.12}$$

函数 $L(x)$ 除去 0 点外，被定义在整个实直线上，在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,\infty)$ 上是不减的，且满足条件 $L(+\infty) = L(-\infty) = 0$. 又在 $\mathbf{R}^1\setminus\{0\}$ 中，$G(x)$ 和 $L(x)$ 有相同的连续点. 对每一有限的 $\delta>0$，我们有 $\int_{-\delta}^{\delta}{}' x^2 dL(x) < \infty$，其中记号 $\int'$ 是指从积分区间中去掉 0 点. 反之，对任一非负常数 σ^2 和任一满足所述条件的函数 $L(x)$，借助(1.12)和(1.10)唯一地确定一个 i.d.c.f. 这样，就得如下的

定理 1.7　函数 $f(t)$ 是 i.d.c.f. 当且仅当它可表成

$$f(t) = \exp\left\{i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty}{}'\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)dL(x)\right\}, \tag{1.13}$$

其中 γ 是实的常数，σ^2 是非负常数，$L(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,\infty)$ 上是不减的，且 $L(\pm\infty) = 0$. 对每一 $0<\delta<\infty$，$\int_{-\delta}^{\delta}{}' x^2 dL(x) < \infty$.

(1.13) 称为 Lévy 公式. 一个 i.d.c.f. 按(1.13)的表示是唯一的.

我们回顾到，当 r.v. X 具有有限方差时，其对应的 c.f. $f(t)$ 的二阶导数存在；反之也对. 从这一事实及定理 1.6，即可得下述

定理 1.8　函数 $f(t)$ 是具有有限方差的 i.d.c.f. 当且仅当它可表成

$$f(t) = \exp\left\{iat + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2}dK(x)\right\}, \tag{1.14}$$

其中 a 是实的常数，$K(x)$ 是有界不减的，且积分号下的函数在 $x=0$ 处的值定义为 $-t^2/2$.

(1.14) 式称为 Kolmogorov 公式. 出现在公式(1.10)、(1.13)和(1.14)中的函数 $G(x)$、$L(x)$ 和 $K(x)$ 分别称作 Lévy-Khintchine、Lévy 和 Kolmogorov 谱函数.

例 1.7　(i) 设 r.v. X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，对应的 c.f. 为

$$f(t) = \exp\{i\mu t - \sigma^2t^2/2\}.$$

取 $\gamma = \mu, L(x) = 0$，那么 $f(t)$ 就有 Levy 表示式(1.13). 若取 $\alpha = \mu$ 及 $K(x) = \sigma^2\delta(x)$，其中 $\delta(x) = 0$ 当 $x < 0$; $\delta(x) = 1$ 当 $x > 0$，那么 $f(t)$ 就有 Kolmogorov 表示式(1.14).

(ii) Poisson 分布的 c.f.

$$f(t) = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\} = \exp\{it\lambda + \lambda(e^{it} - it - 1)\}.$$

取 $\alpha = \lambda, K(x) = \lambda\delta(x - 1)$，那么 $f(t)$ 就有表示式(1.14).

由例 1.5(ii) 及(1.12) 式得

$$L(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1, \\ \lambda, & x > 1. \end{cases}$$

取 $\gamma = \lambda/2, \sigma^2 = 0$ 得 Poisson 分布的 c.f. 对数的 Lévy 表示式(1.13). 此时 $L(x)$ 在 $x = 1$ 是不连续的.

§2　独立随机变量和的极限分布

2.1　无穷小条件

考察独立 r.v. 组列 $\{X_{nk}; k = 1,\cdots,k_n, n = 1,2,\cdots\}$. 设 $k_n \to \infty$，令

$$S_n = \sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}. \tag{2.1}$$

本节的目的在于找出 S_n 的极限分布族. 如果对 $\{X_{nk}\}$ 不作任何限制，那么任何 d.f. $F(x)$ 都可以作为(2.1) 的极限分布. 事实上，如对每一 n 令 X_{n1} 具有 d.f. $F(x)$，而 $X_{nk} = 0, k > 1$，那么对所有 n，S_n 的 d.f. 都为 $F(x)$. 为避免由少数特殊项决定 S_n 的情形，引入某些使和式中每一项在 $n \to \infty$ 时都变得"无穷小"的限制是合理的.

定义 2.1　称 r.v. 组列 $\{X_{nk}; k = 1,\cdots,k_n, n = 1,2,\cdots\}$ 满足**无穷小条件**，若对任给的 $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant k_n} P\{|X_{nk}| \geqslant \epsilon\} = 0. \tag{2.2}$$

无穷小条件可用不同的概念来描述. 记 X_{nk} 的 d.f., c.f. 和中位数分别为 $F_{nk}(x)$, $f_{nk}(t)$ 和 mX_{nk}. 为书写简便，用 $\max_k$ 和 $\sum_k$ 代替 $\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}$ 和 $\sum_{1\leqslant k\leqslant k_n}$.

引理 2.1　下列条件相互等价：

(i) $\{X_{nk}\}$ 满足无穷小条件；

(ii) $\max\limits_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}(x) \to 0$;

(iii) 在任一有限区间中关于 t 一致地有

$$\max_k |f_{nk}(t) - 1| \to 0. \tag{2.3}$$

证 (ii)⇒(i) 函数 $(1+x^2)/x^2$ 在正半直线上递减，故对每一 $\varepsilon > 0$，$n \geqslant 1$ 有

$$\max_k \int_{|x| \geqslant \varepsilon} dF_{nk}(x) \leqslant \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \max_k \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}(x).$$

(i)⇒(iii) 对任何实数 x，$|e^{ix} - 1| \leqslant |x|$，那么对每一 $b < \infty$，当 $|t| \leqslant b$ 时

$$\max_k |f_{nk}(t) - 1| \leqslant \max_k \left| \left(\int_{|x|<\varepsilon} + \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \right) (e^{itx} - 1) dF_{nk}(x) \right|$$

$$\leqslant b\varepsilon + 2 \max_k \int_{|x| \geqslant \varepsilon} dF_{nk}(x).$$

(iii)⇒(ii) 对任何的 d.f. $F(x)$ 和相应的 c.f. $f(t)$ 有

$$\int_0^\infty e^{-t}(1 - \mathrm{Re} f(t)) dt = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^\infty e^{-t} \cos tx dt \right\} dF(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF(x).$$

因此对任何 $T > 0$，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dF_{nk}(x) \leqslant \int_0^\infty e^{-t} |f_{nk}(t) - 1| dt$$

$$< \int_0^T \max_k |f_{nk}(t) - 1| dt + 2\int_T^\infty e^{-t} dt.$$

当(iii)成立时，对任给 $\varepsilon > 0$，可选适当大的 T 使当 n 充分大时上式不超过 ε. 证毕.

引理 2.2 如果 $\{X_{nk}\}$ 满足无穷小条件，那么对每个 $\tau > 0, r > 0$，

$\max\limits_k |mX_{nk}| \to 0$，$\max\limits_k \int_{|x|<\tau} |x|^r dF_{nk}(x) \to 0$.

证 首先不难看出 r.v. X 的中位数 mX 必含于任一满足 $P(X \in I) > \frac{1}{2}$ 的区间 I 内. 令 $\varepsilon > 0$，无穷小条件(2.2)式推出对充分大的 n，

$$\min_k P(|X_{nk}| < \varepsilon) > \frac{1}{2}.$$

因此，对充分大的 n，$\max\limits_k |mX_{nk}| < \varepsilon$. 此外对 $0 < \varepsilon \leqslant \tau$

$$\max_k \int_{|x|<\tau} |x|^r dF_{nk}(x) \leqslant \varepsilon^r + \tau^r \max_k \int_{|x| \geqslant \varepsilon} dF_{nk}(x).$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性得证引理.

2.2　独立 r.v. 和的极限分布

下列 Khintchine 基本结果表明了无穷可分分布在概率极限理论中的作用.

定理 2.1　设独立 r.v. 组列 $\{X_{nk}\}$ 满足无穷小条件，则 $\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}$ 的极限分布族与无穷可分分布族相重合.

为了证明定理，我们需要一些引理. 设 $0 < \tau < \infty$. 令

$$a_{nk} = \int_{|x|<\tau} x \mathrm{d}F_{nk}(x), \quad \overline{F}_{nk}(x) = F_{nk}(x + a_{nk}), \quad \overline{f}_{nk}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{itx} \mathrm{d}\overline{F}_{nk}(x). \tag{2.4}$$

显然

$$|a_{nk}| \leqslant \int_{|x|<\tau} |x| \mathrm{d}F_{nk}(x) < \tau. \tag{2.5}$$

引理 2.3　如果 $\{X_{nk}\}$ 满足无穷小条件，那么 r.v. 组列 $\{\overline{X}_{nk}\}$，其中 $\overline{X}_{nk} = X_{nk} - a_{nk}$，也满足无穷小条件.

证　由引理 2.2，

$$\max_k |a_{nk}| \leqslant \max_k \int_{|x|<\tau} |x| \mathrm{d}F_{nk}(x) \to 0.$$

因此对任意 $\varepsilon > 0$ 和充分大的 n

$$\max_k P(|\overline{X}_{nk}| \geqslant \varepsilon) \leqslant \max_k P(|X_{nk}| + |a_{nk}| \geqslant \varepsilon) \leqslant \max_k P\left(|X_{nk}| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

应用(2.2)，引理证毕.

引理 2.4　设 $\{X_{nk}\}$ 满足无穷小条件，那么对每个 $0 < b < \infty$，当 n 充分大时，$\mathrm{Log}\, f_{nk}(t)$ 在区间 $[-b, b]$ 上有限且

$$\mathrm{Log}\, f_{nk}(t) = f_{nk}(t) - 1 + \theta_{nk}(f_{nk}(t) - 1)^2, \tag{2.6}$$

其中 $|\theta_{nk}| \leqslant 1$. 进而，上述结论对 $\mathrm{Log}\, \overline{f}_{nk}(t)$ 也成立.

证　由 Taylor 展开式，

$$\log(1 + Z) = Z - \frac{1}{2} Z^2 + o(|Z|^2) \quad (Z \to 0).$$

因此，当 $|Z|$ 充分小时，$|\log(1 + Z) - Z| \leqslant |Z|^2$. 令 $Z = Z_{nk}(t) = f_{nk}(t) - 1$. 由引理 2.1，$\max_k |Z_{nk}(t)| \to 0$ 对 $t \in [-b, b]$ 一致成立. 这样(2.6)成立. 引理 2.3 保证了 $\overline{f}_{nk}(t)$ 也满足同样的结论. 证毕.

在下列两个引理中，$F(x)$ 为任意 d.f.，$f(t)$ 为它的 c.f. 记

$$a = \int_{|x|<\tau} x \mathrm{d}F(x), \quad \overline{F}(x) = F(x + a), \quad \overline{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{itx} \mathrm{d}\overline{F}(x).$$

引理 2.5　对任何有限正数 b 存在正数 $c_1=c_1(a,b,\tau)>0$ 满足

$$c_1\max_{|t|\leqslant b}|\bar{f}(t)-1|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}\bar{F}(x). \tag{2.7}$$

证　利用不等式 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-1-\mathrm{i}x|\leqslant x^2/2$，我们有

$$\max_{|t|\leqslant b}|\bar{f}(t)-1|=\max_{|t|\leqslant b}\left|\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(x-a)}-1)\mathrm{d}F(x)\right|$$

$$\leqslant 2\int_{|x|\geqslant\tau}\mathrm{d}F(x)+b\left|\int_{|x|<\tau}(x-a)\mathrm{d}F(x)\right|+\frac{1}{2}b^2\int_{|x|<\tau}(x-a)^2\mathrm{d}F(x)$$

$$\leqslant(2+|a|b)\int_{|x|\geqslant\tau}\mathrm{d}F(x)+\frac{1}{2}b^2\int_{|x|<\tau}(x-a)^2\mathrm{d}F(x).$$

考虑到 $|a|<\tau$ 且函数 $(x-a)^2$ 当 $x\geqslant\tau$ 时不增，

$$\max_{|t|\leqslant b}|\bar{f}(t)-1|\leqslant\left\{\frac{2+|a|b}{(\tau-|a|)^2}+\frac{b^2}{2}\right\}$$

$$\cdot\{1+(\tau+|a|)^2\}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-a)^2}{1+(x-a)^2}\mathrm{d}F(x).$$

令

$$c_1=\left\{\frac{2+|a|b}{(\tau-|a|)^2}+\frac{b^2}{2}\right\}^{-1}\{1+(\tau+|a|)^2\}^{-1}, \tag{2.8}$$

不等式(2.7)成立，证毕.

引理 2.6　设 $0<b<\infty$，m 是 d.f. $F(x)$ 的中位数，如果 $|m|<\tau$，那么存在 $c_2=c_2(m,b,\tau)>0$ 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}\bar{F}(x)\leqslant c_2\int_0^b(1-|f(t)|^2)\mathrm{d}t. \tag{2.9}$$

如果 $f(t)$ 在 $[0,b]$ 上不为 0，那么可以用 $2|\mathrm{Log}|f(t)||$ 代替 $1-|f(t)|^2$.

证　令 X,Y 是两个独立 r.v.，具有相同的 d.f. $F(x)$，记 $X^s=X-Y$. 用 $F^s(x)$ 表示 X^s 的 d.f.，这样 X^s 的 c.f. 为

$$|f(t)|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\cos tx\,\mathrm{d}F^s(x).$$

由于

$$\inf_x\left(1-\frac{\sin bx}{bx}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\geqslant c(b)>0,$$

所以

$$\int_0^b(1-|f(t)|^2)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^b(1-\cos tx)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}F^s(x)$$

$$=b\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{\sin bx}{bx}\right)\mathrm{d}F^s(x)$$

$$\geqslant bc(b)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}F^s(x). \tag{2.10}$$

对 $t\geqslant 0$,令 $F_m(x)=P(X-m<x)$,$q_m(t)=P(|X-m|\geqslant t)$,$q^s(t)=P(|X^s|\geqslant t)$,则

$$q_m(t)\leqslant 2q^s(t),\quad t\geqslant 0. \tag{2.11}$$

事实上,如果 $X-m\geqslant t$ 且 $Y-m<0$,那么 $X^s\geqslant t$. 由于 X,Y 相互独立,利用中位数的定义,

$$\begin{aligned}P(X^s\geqslant t)&\geqslant P(X-m\geqslant t,Y-m\leqslant 0)\\&=P(X-m\geqslant t)P(Y\leqslant m)\geqslant\frac{1}{2}P(X-m\geqslant t),\end{aligned}$$

类似地 $P(X^s\leqslant -t)\geqslant\frac{1}{2}P(X-m<-t)$. 这样(2.11)成立.

如果 $\pm t$ 是 F_m 的连续点,那么 $q_m(t)=1-F_m(t)+F_m(-t)$. 由分部积分并利用(2.11),

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}F_m(x)&=-\int_0^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}q_m(x)=\int_0^{\infty}q_m(x)\mathrm{d}\frac{x^2}{1+x^2}\\&\leqslant 2\int_0^{\infty}q^s(x)\mathrm{d}\frac{x^2}{1+x^2}=2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}F^s(x).\end{aligned} \tag{2.12}$$

此外,显然

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}\overline{F}_m(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-a)^2}{1+(x-a)^2}\mathrm{d}F(x)\\&\leqslant\int_{|x|<\tau}(x-a)^2\mathrm{d}F(x)+\int_{|x|\geqslant\tau}\mathrm{d}F(x).\end{aligned}$$

对每个实数 x,a 和 m,$(x-a)^2\leqslant(x-m)^2+2(m-a)(x-a)$,由此得

$$\begin{aligned}\int_{|x|<\tau}(x-a)^2\mathrm{d}F(x)\leqslant&\int_{|x|<\tau}(x-m)^2\mathrm{d}F(x)\\&+2(\tau+|m|)\left|\int_{|x|<\tau}(x-a)\mathrm{d}F(x)\right|\\\leqslant&\int_{|x|<\tau}(x-m)^2\mathrm{d}F(x)+2|a|(\tau+|m|)\int_{|x|\geqslant\tau}\mathrm{d}F(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}\overline{F}(x)\leqslant&\int_{|x|<\tau}(x-m)^2\mathrm{d}F(x)\\&+\{1+2\tau(\tau+|m|)\}\int_{|x|\geqslant\tau}\mathrm{d}F(x).\end{aligned}$$

但是我们有

$$\int_{|x|<\tau}(x-m)^2\mathrm{d}F(x)\leqslant\{1+(\tau+|m|)^2\}\int_{|x|<\tau}\frac{(x-m)^2}{1+(x-m)^2}\mathrm{d}F(x)$$

$$\leqslant \{1+(\tau+|m|)^2\}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}F_m(x),$$

$$\int_{|x|\geqslant\tau}\mathrm{d}F(x)\leqslant\frac{1+(\tau+|m|)^2}{(\tau-|m|)^2}\int_{|x|\geqslant\tau}\frac{(x-m)^2}{1+(x-m)^2}\mathrm{d}F(x)$$

$$\leqslant\frac{1+(\tau+|m|)^2}{(\tau-|m|)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}F_m(x).$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}F(x)\leqslant c\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}F_m(x), \tag{2.13}$$

其中

$$c=c(m,\tau)=\{1+(\tau+|m|)^2\}\left\{1+\frac{1+2\tau(\tau+|m|)}{(\tau-|m|)^2}\right\}. \tag{2.14}$$

综合上述,令 $c_2=\dfrac{2c}{bc(b)}$,(2.9) 式成立.

引理的第二个结论由下式即可得到:

$$1-|f(t)|^2\leqslant-\mathrm{Log}|f(t)|^2=-2\,\mathrm{Log}|f(t)|.$$

证毕.

引理 2.7 设 $0<b<\infty$,如果 $\{X_{nk}\}$ 满足无穷小条件,那么存在正数 $C_*=C_*(b,\tau)$ 和 $C^*=C^*(b,\tau)$,使得对所有 k 和充分大的 n

$$C_*\max_{|t|\leqslant b}|\bar f_{nk}(t)-1|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}\bar F_{nk}(x)\leqslant C^*\int_0^b|\log|\bar f_{nk}(t)||\mathrm{d}t.$$

证 由引理 2.2,我们有

$$\max_k|a_{nk}|\leqslant\max_k\int_{|x|<\tau}|x|\mathrm{d}F_{nk}(x)\to0. \tag{2.15}$$

因此当 n 充分大时,$\max\limits_k|a_{nk}|<\tau/2$. 应用引理 2.5 于 d.f. $F_{nk}(x)$,在(2.8) 式中令 $|a|=\tau/2$ 得到 C_*.

另一方面,对 $\tau>0$,引理 2.2 推出当 n 充分大时,$\max\limits_k|mX_{nk}|<\tau/2$,应用引理 2.6 于 d.f. $F_{nk}(x)$,在(2.14) 和(2.15) 式中用 $\tau/2$ 代替 $|m|$ 得到 C^*.

引理 2.8 设独立 r.v. 组列 $\{X_{nk}\}$ 满足无穷小条件. 如果对每一个 t,

$$\prod_k|f_{nk}(t)|\to|f(t)|,$$

其中 $f(t)$ 是 c.f.,那么存在一个正数 c 使得当 n 充分大时

$$\sum_k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}\bar F_{nk}(x)\leqslant c. \tag{2.16}$$

证 由引理 2.7 可得

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}\bar F_{nk}(x)\leqslant C^*\sum_{k=1}^{k_n}\int_0^b|\mathrm{Log}|f_{nk}(t)||\mathrm{d}t.$$

若能证 $\int_0^b \left|\text{Log}\prod_k |f_{nk}(t)|\right| \mathrm{d}t \to \int_0^b |\text{Log}|f(t)|| \mathrm{d}t$ 且右边积分有限，就得引理的结论. 由于 $f(t)$ 是c.f.，故对 $0<\varepsilon<1$，有 $b>0$ 使当 $|t|<b$ 时，$|f(t)|>1-\varepsilon>0$. 由此得 $0\leqslant |\text{Log}|f(t)||<|\text{Log}(1-\varepsilon)|<\infty$. 所以右边积分有限. 而由假设可推出

$$\prod_k |f_{nk}(t)|^2 \to |f(t)|^2,$$

且 $|f_{nk}(t)|^2$，$|f(t)|^2$ 都是c.f.，因此在 $|t|\leqslant b$ 中上述收敛性一致地成立，因 $\{X_{nk}\}$ 满足无穷小条件，所以由引理2.1，当 $|t|\leqslant b$ 且 n 充分大时 $\text{Log}\,f_{nk}(t)$ 有意义，而且在 $|t|\leqslant b$ 中一致地有

$$\sum_k |\log|f_{nk}(t)|| \to |\text{Log}|f(t)||.$$

由此即可推得引理的结论.

引理 2.9　设独立r.v.组列 $\{X_{nk}\}$ 满足无穷小条件，且(2.16)成立，则对任一 t 有

$$\sum_k \{\text{Log}\,\bar{f}_{nk}(t) - (\bar{f}_{nk}(t) - 1)\} \to 0. \tag{2.17}$$

证　首先由引理2.4，对充分大的 n 有

$$\text{Log}\,\bar{f}_{nk}(t) = \bar{f}_{nk}(t) - 1 + \theta_{nk}(\bar{f}_{nk}(t) - 1)^2,$$

其中 $|\theta_{nk}|\leqslant 1$. 这样由引理2.7及(2.16)式我们有

$$\begin{aligned}\left|\sum_k \{\text{Log}\,\bar{f}_{nk}(t) - (\bar{f}_{nk}(t) - 1)\}\right| &\leqslant \sum_k |\bar{f}_{nk}(t) - 1|^2 \\ &\leqslant \max_k |\bar{f}_{nk}(t) - 1| \cdot \sum_k C_*^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}\bar{F}_{nk}(x) \\ &\leqslant (c/C_*)\max_k |\bar{f}_{nk}(t) - 1| \to 0.\end{aligned}$$

证毕.

定理 2.1 的证明　首先来证任一i.d.c.f. $F(x)$ 是某一满足无穷小条件独立r.v.组列 $\{X_{nk}\}$ 的和 $\sum_k X_{nk}$ 的极限分布. 设 $f(t)$ 是对应的i.d.c.f.，对每一 n，有c.f. $f_n(t)$ 使 $f(t)=(f_n(t))^n$. 对 $k=1,\cdots,n$，令 $f_{nk}(t)=f_n(t)$. 那么有 $f(t)=\lim_n \prod_{k=1}^n f_{nk}(t)$. 这样，c.f.为 $f_{nk}(t)$ 的独立r.v.组列 $\{X_{nk}\}$ 之和的d.f.列依分布收敛于 $F(x)$. 由于对任一有限区间中的 t 一致地有 $f_n(t)\to 1$，由引理2.1得 $\{X_{nk}\}$ 满足无穷小条件.

其次，设独立r.v.组列 $\{X_{nk}\}$ 满足无穷小条件，且和 $\sum_k X_{nk}$ 依分布收敛于d.f. $F(x)$. 下证 $F(x)$ 是无穷可分的. 由第一章定理4.2，

$$\prod_k f_{nk}(t) \to f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x). \tag{2.18}$$

再由引理 2.8 和 2.9 知此时(2.17)成立. 而

$$\begin{aligned}\operatorname{Log} f_{nk}(t) - (\bar f_{nk}(t) - 1) &= \operatorname{Log} f_{nk}(t) - \left\{ ita_{nk} + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1) d\bar F_{nk}(x) \right\} \\ &= \operatorname{Log} f_{nk}(t) - ita_{nk} - it\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} d\bar F_{nk}(x) \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) d\bar F_{nk}(x),\end{aligned}$$

所以我们有

$$\begin{aligned}&\sum_k \{\operatorname{Log} \bar f_{nk}(t) - (\bar f_{nk}(t) - 1)\} \\ &= \operatorname{Log} \prod_k f_{nk}(t) - \left\{ it\gamma_n + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2} dG_n(x) \right\},\end{aligned} \tag{2.19}$$

其中

$$\gamma_n = \sum_k \left\{ a_{nk} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} d\bar F_{nk}(x) \right\},$$

$$G_n(x) = \sum_k \int_{-\infty}^{x} \frac{y^2}{1+y^2} d\bar F_{nk}(y).$$

由引理 2.8 知当 n 充分大时 $G_n(x)$ 是有界不减左连续函数,所以 $\psi_n = (\gamma_n, G_n)$ 是 i.d.c.f. 的对数. 由(2.17)、(2.18)及(2.19)即得 $e^{\psi_n(t)} \to f(t)$. 由定理 1.3 知 $f(t)$ 是 i.d.c.f. 证毕.

注 定理的结论可改为:对常数 b_n, $\sum_k X_{nk} - b_n$ 的极限 d.f. 族与 i.d.d.f. 族重合.

2.3 收敛于无穷可分分布函数的条件

现在来考察满足无穷小条件的独立 r.v. 组列 $\{X_{nk}\}$ 收敛于某给定的 i.d.d.f. 的充要条件.

假设 $F(x)$ 是 i.d.d.f., 其对应的 c.f. $f(t)$ 具有表示(1.10). 又设独立 r.v. 组列 $\{X_{nk}\}$ 满足无穷小条件,

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{x} \frac{y^2}{1+y^2} d\bar F_{nk}(y), \tag{2.20}$$

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ a_{nk} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} d\bar F_{nk}(x) \right\}, \tag{2.21}$$

其中 a_{nk} 和 $F_{nk}(x)$ 由(2.4)式定义.

定理 2.2　S_n 依分布收敛于 $F(t)$ 的充要条件是

$$G_n \xrightarrow{d} G,\quad \gamma_n \to \gamma. \tag{2.22}$$

证　条件必要　由定理 2.1 的证明知此时

$$e^{\psi_n(t)} \to f(t).$$

因此 $\psi_n(t) \to \mathrm{Log} f(t)$. 由引理 1.2 得(2.22)成立.

条件充分　若(2.22)成立,由引理 1.2(i) 知 $\psi_n \to \psi = (\gamma, G)$. 因为 $G_n \xrightarrow{d} G$,所以

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}\overline{F}_{nk}(x) \to G(\infty) < \infty.$$

由引理 2.9 及(2.19)式,可以推得对任一 t 有

$$\mathrm{Log}\prod_k f_{nk}(t) - \psi_n(t) \to 0.$$

这就得证

$$\prod_k f_{nk}(t) \to e^{\psi(t)} = f(t),$$

即和 $\sum_k X_{nk}$ 的分布函数收敛于 d.f. $F(x)$. 证毕.

现在我们来给出一组收敛于i.d.d.f. $F(x)$的充要条件. 由于它们是通过 X_{nk} 的分布函数直接表达的,所以更便于验证.

定理 2.3　S_n 依分布收敛于i.d.d.f. $F(x)$ 的充要条件是:

(A) 在 $G(x)$ 的任一连续点 x 上

$$\sum_k F_{nk}(x) \to \int_{-\infty}^{x}\frac{1+y^2}{y^2}\mathrm{d}G(y),\quad 当\ x<0,$$

$$\sum_k [1-F_{nk}(x)] \to \int_{x}^{\infty}\frac{1+y^2}{y^2}\mathrm{d}G(y),\quad 当\ x>0;$$

(B)

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\int_{|x|<\varepsilon}x^2\mathrm{d}F_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon}x\mathrm{d}F_{nk}(x)\right)^2\right\}\\ &= \lim_{\varepsilon\to0}\liminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\int_{|x|<\varepsilon}x^2\mathrm{d}F_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon}x\mathrm{d}F_{nk}(x)\right)^2\right\}\\ &= G(+0) - G(-0);\end{aligned}$$

(C) 对给定的 $\tau > 0$ 且 $\pm\tau$ 是 $G(x)$ 的连续点,

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<\tau}x\mathrm{d}F_{nk}(x) \to \gamma + \int_{|x|<\tau}x\mathrm{d}G(x) - \int_{|x|\geq\tau}\frac{\mathrm{d}G(x)}{x}.$$

证　我们来证在无穷小条件下(A)、(B)、(C) 与(2.20)等价.

首先来证条件(A)、(B)等价于条件

(D) $G_n(x) = \sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{x}\frac{y^2}{1+y^2}\mathrm{d}F_{nk}(y) \xrightarrow{d} G(x)$.

由第一章定理 4.1 可推得(D)等价于下面两条件：

(D_1) 在 $G(x)$ 的连续点上

$$\sum_{k=1}^{k_n}\bar{F}_{nk}(y) \longrightarrow \int_{-\infty}^{x}\frac{1+y^2}{y^2}\mathrm{d}G(y), \quad 当 x<0,$$

$$\sum_{k=1}^{k_n}(1-\bar{F}_{nk}(x)) \longrightarrow \int_{x}^{\infty}\frac{1+y^2}{y^2}\mathrm{d}G(y), \quad 当 x>0;$$

(D_2)

$$\lim_{\varepsilon\to0}\liminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<\varepsilon}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}\bar{F}_{nk}(x) = \lim_{\varepsilon\to0}\liminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<\varepsilon}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}\bar{F}_{nk}(x) = G(+0)-G(-0).$$

又(D_1)、(D_2)等价于(A)、(D_2). 事实上，若记 $a_n = \max_k|a_{nk}|$，由引理 2.2 可知在无穷小条件下，对任给的 $\delta>0$ 有 N，当 $n\geqslant N$ 时 $|a_n|<\delta$. 所以

$$F_{nk}(x-\delta)\leqslant F_{nk}(x+a_{nk}) = \bar{F}_{nk}(x)\leqslant F_{nk}(x+\delta).$$

这样，当(A)成立时

$$\left|\sum_k F_{nk}(x)-\sum_k F_{nk}(x)\right| \leqslant \sum_k F_{nk}(x+\delta)-\sum_k F_{nk}(x-\delta) \to \int_{x-\delta}^{x+\delta}\frac{1+y^2}{y^2}\mathrm{d}G(y).$$

让 $\delta\downarrow0$ 就得(D_1). 同样可由(D_1)推得(A).

现在来证(A)、(D_2)等价于(A)、(B). 设 $0<\varepsilon<\tau$，引入变量

$$T_n = \sum_k\int_{|x|<\varepsilon}(x-a_{nk})^2\mathrm{d}F_{nk}(x) - \sum_k\left\{\int_{|x|<\varepsilon}x^2\mathrm{d}F_{nk}(x)-\left(\int_{|x|<\varepsilon}x\mathrm{d}F_{nk}(x)\right)^2\right\}$$

和

$$U_n = \sum_k\int_{|x|<\varepsilon}(x-a_{nk})^2\mathrm{d}F_{nk}(x) - \sum_k\int_{|x|<\varepsilon}x^2\mathrm{d}\bar{F}_{nk}(x).$$

我们有

$$T_n = \sum_k a_{nk}^2\int_{|x|<\varepsilon}\mathrm{d}F_{nk}(x) - 2\sum_k a_{nk}\int_{|x|<\varepsilon}x\mathrm{d}F_{nk}(x) + \sum_k\left(\int_{|x|<\varepsilon}x\mathrm{d}F_{nk}(x)\right)^2$$

$$= \sum_k\left(\int_{|x|<\tau}x\mathrm{d}F_{nk}(x)-\int_{|x|<\varepsilon}x\mathrm{d}F_{nk}(x)\right)^2 - \sum_k a_{nk}^2P(|X_{nk}|\geqslant\varepsilon)$$

$$= \sum_k \left(\int_{\varepsilon\leqslant |x|<\tau} x\,\mathrm{d}F_{nk}(x)\right)^2 - \sum_k a_{nk}^2 P(|X_{nk}|\geqslant\varepsilon),$$

$$|T_n| \leqslant (a_n\tau + a_n^2)\sum_k P(|X_{nk}|\geqslant\varepsilon).$$

当(A)成立时,

$$\sum_k P(|X_{nk}|\geqslant\varepsilon) \to \int_{|y|\geqslant\varepsilon}\frac{1+y^2}{y^2}\mathrm{d}G(y) \leqslant \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}G(\infty).$$

所以 $T_n\to0$. 此外,设 $0<\delta<\varepsilon$,那么当 $n\to\infty$ 时

$$|U_n| = \left|\sum_k\left\{\int_{|x|<\varepsilon} - \int_{|x-a_{nk}|<\varepsilon}\right\}(x-a_{nk})^2 \mathrm{d}F_{nk}(x)\right|$$

$$\leqslant \sum_k\left\{\int_{\varepsilon-\delta\leqslant|x|\leqslant\varepsilon} + \int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant\varepsilon+\delta}\right\}(x-a_{nk})^2\mathrm{d}F_{nk}(x)$$

$$\leqslant 9\varepsilon^2\sum_k\int_{\varepsilon-\delta\leqslant|x|\leqslant\varepsilon+\delta}\mathrm{d}F_{nk}(x)$$

$$\to 9\varepsilon^2\int_{\varepsilon-\delta\leqslant|x|\leqslant\varepsilon+\delta}\frac{1+y^2}{y^2}\mathrm{d}G(y)\to0\quad(\delta\downarrow0).$$

这样就得 $T_n - U_n\to0$,即

$$\sum_k\int_{|x|<\varepsilon}x^2\mathrm{d}\bar F_{nk}(x) - \sum_k\left\{\int_{|x|<\varepsilon}x^2\mathrm{d}F_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon}x\mathrm{d}F_{nk}(x)\right)^2\right\}\to0.$$

又由

$$\frac{1}{1+\varepsilon^2}\sum_k\int_{|x|<\varepsilon}x^2\mathrm{d}\bar F_{nk}(x)\leqslant\sum_k\int_{|x|<\varepsilon}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}\bar F_{nk}(x)$$

$$\leqslant\sum_k\int_{|x|<\varepsilon}x^2\mathrm{d}\bar F_{nk}(x)\leqslant(1+\varepsilon^2)\sum_k\int_{|x|<\varepsilon}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}\bar F_{nk}(x),$$

我们得到(A)、(B)与(A)、(D_2)等价. 这也就证明了(A)、(B)与(D)等价.

最后,只需证明在(A)、(B)(或(D))下,(C)与(2.22)中的 $\gamma_n\to\gamma$ 等价. 即只需证

$$\sum_k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}\bar F_{nk}(x)\to\int_{|x|\geqslant\tau}\frac{\mathrm{d}G(x)}{x} - \int_{|x|<\tau}x\mathrm{d}G(x).$$

因为

$$\sum_k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}\bar F_{nk}(x) = \sum_k\int_{|x|<\tau}x\mathrm{d}\bar F_{nk}(x) - \sum_k\int_{|x|<\tau}\frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}\bar F_{nk}(x)$$

$$+ \sum_k\int_{|x|\geqslant\tau}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}\bar F_{nk}(x),$$

由(D)只需证 $\sum_k\int_{|x|<\tau}x\mathrm{d}\bar F_{nk}(x)\to0$. 而

$$\left|\sum_k\int_{|x|<\tau}x\mathrm{d}\bar F_{nk}(x)\right|\leqslant\left|\sum_k\int_{|x|<\tau}(x-a_{nk})\mathrm{d}F_{nk}(x)\right|$$

$$+\left|\sum_k\left\{\int_{|x-a_{nk}|<\tau}-\int_{|x|<\tau}\right\}(x-a_{nk})\mathrm{d}F_{nk}(x)\right|$$

$$\leqslant\left|\sum_k a_{nk}P(|X_{nk}|\geqslant\tau)\right|$$

$$+\left|\sum_k\left\{\int_{\substack{|x|\geqslant\tau\\|x-a_{nk}|<\tau}}-\int_{\substack{|x|<\tau\\|x-a_{nk}|\geqslant\tau}}\right\}(x-a_{nk})\mathrm{d}F_{nk}(x)\right|$$

$$\leqslant a_n\sum_k P\{|X_{nk}|\geqslant\tau\}+\tau\sum_k P\{\tau\leqslant|X_{nk}|<\tau+a_n\}$$

$$+(\tau+a_n)\sum_k P\{\tau-a_n\leqslant|X_{nk}|<\tau\}.$$

在无穷小条件下由引理 2.2 知 $a_n\to 0$. 又由(A)知和数 $\sum_k P\{|X_{nk}|\geqslant\tau\}$ 是有界的. 由于 $\pm\tau$ 是 $G(x)$ 的连续点，得证上式右边趋于 0. 证毕.

注 定理2.2 的结论可以改为：存在常数列 $\{b_n\}$，使 $S_n-b_n=\sum_{k=1}^{k_n}X_{nk}-b_n$ 依分布收敛于 $F(x)$ 的充要条件是 $G_n\xrightarrow{d}G$ 及 $\gamma_n-b_n\to\gamma$.

同样，定理 2.3 的结论可改为：S_n-b_n 依分布收敛于 $F(x)$ 的充要条件是(A)、(B)及

$$\sum_k\int_{|x|<\tau}x\mathrm{d}F_{nk}(x)-b_n\to\gamma+\int_{|x|<\tau}x\mathrm{d}G(x)-\int_{|x|\geqslant\tau}\frac{\mathrm{d}G(x)}{x}.$$

最后，利用 i.d.c.f. 的 Lévy 表示式(1.13)，可以给出收敛于某给定的 i.d.d.f. 的另一组充要条件.

定理 2.4 对满足无穷小条件的独立 r.v. 组列 $\{X_{nk}\}$，存在常数 b_n，使得和 $\sum_{k=1}^{k_n}X_{nk}-b_n$ 依分布收敛于 i.d.d.f. $F(x)$ 的充要条件是：

(i) $\sum_k F_{nk}(x)\to L(x)$， 当 $x<0$，

$\sum_k(F_{nk}(x)-1)\to L(x)$， 当 $x>0$

在 $L(x)$ 的任一连续点上成立；

(ii)
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\sum_k\left\{\int_{|x|<\varepsilon}x^2\mathrm{d}F_{nk}(x)-\left(\int_{|x|<\varepsilon}x\mathrm{d}F_{nk}(x)\right)^2\right\}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\liminf_{n\to\infty}\sum_k\left\{\int_{|x|<\varepsilon}x^2\mathrm{d}F_{nk}(x)-\left(\int_{|x|<\varepsilon}x\mathrm{d}F_{nk}(x)\right)^2\right\}$$
$$=\sigma^2.$$

§3　L族和稳定分布族

现在来考察独立r.v.列$\{X_n;n\geqslant 1\}$的正则化部分和

$$\frac{1}{a_n}S_n-b_n=\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}X_k-b_n,\quad a_n>0 \tag{3.1}$$

的极限分布族.本节将给出这一极限分布族的一个具体刻画,特别对$\{X_n;n\geqslant 1\}$是i.i.d.情形,我们将给出极限分布族的c.f.的具体表示形式.

3.1　L族

对于独立r.v.列$\{X_n;n\geqslant 1\}$的正则化和(3.1),如记$X_{nk}=X_k/a_n$,那么它就可看作独立r.v.组列的特殊情形.此时无穷小条件就是:对任给的$\varepsilon>0$,

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}P\{|X_k|\geqslant\varepsilon a_n\}\to 0. \tag{3.2}$$

用L族记满足无穷小条件(3.2)的独立r.v.序列$\{X_n;n\geqslant 1\}$的正则化和(3.1)的极限分布族,其中$\{a_n\}$,$\{b_n\}$是常数列.由§2知L族是i.d.d.f.族的子集.

首先来看一下正则化和(3.1)弱收敛时,正则化常数a_n所具有的性质.

引理3.1　设满足无穷小条件(3.2)的独立r.v.序列的正则化和(3.1)弱收敛于非退化分布$F(x)$,那么$a_n\to\infty$且$a_{n+1}/a_n\to 1$.

证　记X_k的c.f.为$\nu_k(t)$,那么和(3.1)的c.f.

$$g_n(t)=e^{-itb_n}\prod_{k=1}^{n}\nu_k(t/a_n)\to f(t)\qquad(\text{非退化}).$$

若$a_n\not\to\infty$,那么$\{a_n\}$有一有界子列,而此子列有一进一步的子列$a_{n'}\to a(n'\to\infty)$.记$t_{n'}=a_{n'}t$.由无穷小条件及引理2.1可知,对每一k,$\nu_k(t)=\nu_k(t_{n'}/a_{n'})\to 1$,因此得$|\nu_k(t)|=1$,从而$|f(t)|=1$.这与非退化的假设矛盾,所以必有$a_n\to\infty$.

由条件(3.2)知$X_{n+1}/a_{n+1}\to 0(P)$,所以和

$$\frac{1}{a_{n+1}}\sum_{k=1}^{n}X_k-b_{n+1}$$

也弱收敛于$F(x)$.如用$F_n(x)$记和(3.1)的d.f.,即有

$$P\left\{\frac{1}{a_{n+1}}\sum_{k=1}^{n}X_k-b_{n+1}<x\right\}=F_n(\alpha_nx+\beta_n)\to F(x),$$

其中$\alpha_n=a_{n+1}/a_n$,$\beta_n=a_{n+1}b_{n+1}/a_n-b_n$.由第一章定理4.5(A)就知$\alpha_n=a_{n+1}/a_n\to 1$.证毕.

现在来讨论L族分布的c.f.的性质.

定理 3.1 c.f. $f(t)$ 是 L 族分布的 c.f. 当且仅当对每一 c，$0<c<1$，存在 c.f. $f_c(t)$ 使得

$$f(t)=f_c(t)f(ct). \tag{3.3}$$

证 首先来证，若(3.3)成立，则对任一 t，$f(t)\neq 0$. 若不然，有 $f(2a)=0$，而当 $0\leqslant t<2a$ 时，$f(t)\neq 0$. 由(3.3)得 $f_c(2a)=0$. 但由第一章(3.11)式知

$$1=|1-f_c(2a)|^2\leqslant 4(1-|f_c(a)|^2).$$

而另一方面，由 $f(t)$ 的连续性可推得当 $c\to 1$ 时，$f_c(a)=f(a)/f(ca)\to 1$，矛盾.

条件充分 只需证明存在满足无穷小条件(3.2)的独立 r.v. 列 $\{X_n;n\geqslant 1\}$，使 $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ 弱收敛于 $F(x)$. 事实上，若令独立 r.v. $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 有 c.f.

$$\nu_k(t)=f_{(k-1)/k}(kt)=f(kt)/f((k-1)t),$$

那么 $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ 的 c.f. 是 $\prod_{k=1}^{n}\nu_k\left(\frac{t}{n}\right)=f(t)$，且

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\nu_k(t/n)-1|=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\left[f\left(\frac{kt}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}t\right)\right]\Big/f\left(\frac{k-1}{n}t\right)\right|.$$

由于此时 $f(t)$ 无处为 0，在任一有限区间 $|t|\leqslant b$ 中一致连续，所以对任给的 $\varepsilon>0$，有 N，使当 $n\geqslant N$ 时成立

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\nu_k(t/n)-1|<\varepsilon.$$

由引理 2.1 就得 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 满足无穷小条件(3.2)，充分性得证.

条件必要 由于退化分布的 c.f. e^{iat} 显然满足(3.3)，故可设 $f(t)$ 是非退化的，且

$$g_n(t)=e^{-itb_n}\prod_{k=1}^{n}\nu_k(t/a_n)\to f(t). \tag{3.4}$$

由引理 3.1 知 $a_n\to\infty$，$a_{n+1}/a_n\to 1$. 因此对任一正数 $c(<1)$，如令 $m_n=\max\{j:j\leqslant n,a_j\leqslant ca_n\}$，那么

$$m_n\to\infty,\quad n-m_n\to\infty,\quad a_{m_n}/a_n\to c.$$

记 $g_n(t)=g_n^{(1)}(t)g_n^{(2)}(t)$，其中

$$g_n^{(1)}(t)=\exp\{-icb_{m_n}t\}\prod_{k=1}^{m_n}\nu_k\left(\frac{a_{m_n}}{a_n}\frac{t}{a_{m_n}}\right),$$

$$g_n^{(2)}(t)=\exp\{-i(b_n-cb_{m_n})t\}\prod_{k=m_n+1}^{n}\nu_k\left(\frac{t}{a_n}\right).$$

注意到 $g_n(t)\to f(t)$ 及整数列 $\{m_n\}$ 的性质，我们有 $g_n^{(1)}(t)\to f(ct)$. 因此

c.f. $g_n^{*2}(t)$ 也收敛于连续函数 $f_c(t)=f(t)/f(ct)$. 由第一章定理4.2知 $f_c(t)$ 为c.f. 证毕.

注 从条件必要性的证明可见c.f. $f_c(t)$ 是满足无穷小条件(3.2)的独立r.v.序列和的极限,所以 $f_c(t)$ 是i.d.的.

由于 L 分布族是i.d.d.f.族的子集,所以它的c.f.有Lévy表示

$$f(t)=\exp\left\{i\gamma t-\frac{\sigma^2t^2}{2}+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)dL(x)\right\}. \tag{3.5}$$

我们也可以通过Lévy谱 $L(x)$ 来给出 L 族c.f.的一个刻画.

定理 3.2 i.d.d.f. $F(x)$ 属于 L 族的充要条件是它对应的Lévy谱函数 $L(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 及 $(0,\infty)$ 上绝对连续,有左、右导数且函数 $xL'(x)$ 是不增的,其中 $L'(x)$ 表示左或右导数.

证明从略,读者可参看[13,19].

从该定理知,Poisson分布不属于 L 族,因为它的谱函数 $L(x)$ 在 $x=1$ 处不连续.

3.2 稳定分布族

记i.i.d.r.v.列 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 的正则化和

$$\frac{1}{a_n}S_n-b_n=\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}X_k-b_n,\quad a_n\to\infty\quad(n\to\infty) \tag{3.6}$$

的极限分布族为 S. 这时,序列 $\{X_k/a_n;1\leqslant k<n,n\geqslant 1\}$ 满足无穷小条件,因此 S 是 L 族的子集.

为刻画 S 族的c.f.,我们引入如下的

定义 3.1 称d.f. $F(x)$ 或其对应的c.f. $f(t)$ 是**稳定的**,若对任给 $a_1>0$, $a_2>0$,存在 $a>0$ 及 b 使得

$$f(a_1t)f(a_2t)=e^{ibt}f(at), \tag{3.7}$$

即对任给 $a_1>0,a_2>0,b_1,b_2$,存在 $a>0$ 及 b 使得

$$F(a_1x+b_1)*F(a_2x+b_2)=F(ax+b).$$

我们有

定理 3.3 d.f. $F(x)$ 属于 S 的充要条件是 $F(x)$ 是稳定的.

证 条件充分 对于稳定分布 $F(x)$,记它的c.f.为 $f(t)$. 作i.i.d.r.v.列 $\{X_n;n\geqslant 1\}$,使每一 X_n 具有d.f. $F(x)$. 此时 $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$ 的c.f.是 $f^n(t)$. 由于(3.7)成立,故有 $a_n>0$ 和 b_n 使

$$[f(t)]^n=e^{ib_nt}f(a_nt).$$

这样,和 $a_n^{-1}S_n-b_n$ 的c.f.为 $f(t)$,从而得证 $F(x)\in S$.

条件必要　设 $F(x) \in S$. 因为退化分布是稳定的，所以可设 $F(x)$ 是非退化的. 记 X 的 c.f. 为 $\nu(t)$，那么存在 $a_n > 0$ 及 b_n 使对一切 t

$$e^{-itb_n}[\nu(t/a_n)]^n \to f(t). \tag{3.8}$$

由引理 3.1 知当 $n \to \infty$ 时 $a_n \to \infty$ 且 $a_{n+1}/a_n \to 1$. 设 $0 < c_1 < c_2, d_1、d_2$ 是给定实数，令

$$m_n = \max\{j; j \leqslant n, a_j \leqslant c_1 a_n/c_2\}.$$

那么当 $n \to \infty$ 时有

$$a_{m_n}/a_n \to c_1/c_2.$$

记 $\alpha_n = a_n c_1$, $\beta_n = (a_n b_n + a_{m_n} b_{m_n} + a_n d_1 + a_{m_n} d_2)/\alpha_n$. 考察和数

$$\frac{a_n}{\alpha_n}\left(\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} X_k - b_n - d_1\right) + \frac{a_{m_n}}{\alpha_n}\left(\frac{1}{a_{m_n}}\sum_{k=n+1}^{n+m_n} X_k - b_{m_n} - d_2\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha_n}\sum_{k=1}^{n+m_n} X_k - \beta_n. \tag{3.9}$$

由第一章定理4.5(B)知左边两项分别弱收敛于分布 $F(c_1x + d_1)$ 和 $F(c_2x + d_2)$. 所以(3.9)的极限分布为 $F(c_1x + d_1) * F(c_2x + d_2)$. 而由第一章定理4.5($A$)知右边的极限分布必为 $F(ax + b)$ 的形式. 这就证得 $F(x)$ 是稳定的.

进一步，我们可以写出稳定 c.f. 的具体表示形式.

定理 3.4　i.d.c.f. $f(t) \in S$ 当且仅当它的 Levy 谱函数 $L(x)$ 及 σ^2 满足

(i) $L(x) = 0$ 或

(ii) $\sigma^2 = 0$ 且

$$L(x) = \begin{cases} c_1/|x|^\alpha, & \text{当 } x < 0, \\ -c_2/x^\alpha, & \text{当 } x > 0, \end{cases}$$

其中 $0 < \alpha < 2$, $c_1 \geqslant 0$, $c_2 \geqslant 0$, $c_1 + c_2 > 0$.

定理 3.5　c.f. $f(t) \in S$ 当且仅当

$$f(t) = \exp\left\{i\gamma t - c|t|^\alpha\left(1 + i\beta\frac{t}{|t|}\omega(t,\alpha)\right)\right\}, \tag{3.10}$$

其中 c, α, β 和 γ 是实数，$c \geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 2$, $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$，并且

$$\omega(t,\alpha) = \begin{cases} \tan\dfrac{\pi\alpha}{2}, & \alpha \neq 1, \\ \dfrac{2}{\pi}\operatorname{Log}|t|, & \alpha = 1. \end{cases}$$

称(3.10)中的 α 为稳定分布的特征指数. $c = 0$ 时对应的 $f(t) = e^{i\gamma t}$ 是退化分布 c.f.；$\alpha = 2$, $\beta = 0$ 时对应的 $f(t) = e^{i\gamma t - ct^2}$ 是正态分布 c.f.；$\alpha = 1$, $\beta = 0$ 时对应的 $f(t) = e^{i\gamma t - c|t|}$ 是 Cauchy 分布的 c.f.，此时对应的密度函数

$$p(x)=\frac{1}{\pi}\frac{c}{c^2+(x-\gamma)^2},\qquad c>0;$$

$\beta=0,\gamma=0$ 时对应的 $f(t)=e^{-c|t|^\alpha}$ 是对称稳定分布的c.f.

最后我们介绍吸引域的概念及其有关结果. 令 $\{X_n\}$ 是i.i.d.r.v.列，它的d.f.为 $V(x)$. 若存在 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，$a_n>0$，使得

$$Z_n=\frac{1}{a_n}\sum_{k}^{n}X_k-b_n$$

依分布收敛于某个d.f. $G(x)$，则称 $V(x)$ 被吸引到 $G(x)$. 被吸引到 $G(x)$ 的d.f.的全体称为 $G(x)$ 的**吸引域**. 从定理3.3知道，只有稳定分布才有吸引域.

定理3.6　d.f. $V(x)$ 属于正态分布吸引域的充要条件是

$$\int_{|x|\geq z}\mathrm{d}V(x)=o\left(\frac{1}{z^2}\int_{|x|<z}x^2\mathrm{d}V(x)\right)\quad(z\to+\infty).$$

定理3.7　d.f. $V(x)$ 属于特征指数 $\alpha<2$ 的稳定分布的吸引域的充要条件是

$$V(x)=(c_1+o(1))|x|^{-\alpha}h(|x|)\qquad(x\to-\infty),$$

$$1-V(x)=(c_2+o(1))x^{-\alpha}h(x)\qquad(x\to+\infty),$$

其中 $h(x)$ 是缓变函数，c_1，c_2 由定理3.4确定.

定理的证明参见[13,19].

§4　中心极限定理

4.1　独立r.v.组列的中心极限定理

我们在§2给出了满足无穷小条件的独立r.v.组列 $\{X_{nk}\}$ 的和依分布收敛于一个给定的i.d.d.f.的充要条件. 这些条件形式上虽较复杂，但对于正态分布、退化分布或Poisson分布，可以导出许多简单有用的结果. 这一节只考虑极限分布是正态分布的情形，并称所得到的极限定理为**中心极限定理**.

定理4.1　设 $\{X_{nk};k=1,\cdots,k_n,n=1,2,\cdots\}$ 是独立r.v.组列，记 X_{nk} 的d.f.为 $F_{nk}(x)$. 那么 $\{X_{nk}\}$ 满足无穷小条件(2.2)且和 $S_n=\sum_{k=1}^{k_n}X_{nk}$ 依分布收敛于正态分布 $N(a,\sigma^2)$ 的充要条件是对任给的 $\varepsilon>0$，当 $n\to\infty$ 时，

$$\sum_{k=1}^{k_n}P\{|X_{nk}|\geq\varepsilon\}\to0,\tag{4.1}$$

$$\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\int_{|x|<\varepsilon}x^2\mathrm{d}F_{nk}(x)-\left(\int_{|x|<\varepsilon}x\mathrm{d}F_{nk}(x)\right)^2\right\}\to\sigma^2,\tag{4.2}$$

$$\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<\varepsilon} x\mathrm{d}F_{nk}(x)\to a. \tag{4.3}$$

证　**条件充分**　由(4.1)推出无穷小条件(2.2)是显然的. 注意到正态分布 $N(a,\sigma^2)$ 的 c.f. 的 Lévy-Khintchine 表示式(1.1)中的

$$\gamma=a,\quad G(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x<0,\\ \sigma^2, & \text{当 } x\geqslant 0.\end{cases}$$

此时定理 2.3 的条件均被满足,所以和 S_n 依分布收敛于正态分布 $N(a,\sigma^2)$.

条件必要　由定理 2.3 及正态分布 c.f. 的表示,此时(4.1)、(4.3)及下式成立

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\int_{|x|<\varepsilon}x^2\mathrm{d}F_{nk}(x)-\left(\int_{|x|<\varepsilon}x\mathrm{d}F_{nk}(x)\right)^2\right\}\\ &=\lim_{\varepsilon\to 0}\liminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\int_{|x|<\varepsilon}x^2\mathrm{d}F_{nk}(x)-\left(\int_{|x|<\varepsilon}x\mathrm{d}F_{nk}(x)\right)^2\right\}\\ &=\sigma^2.\end{aligned}\tag{4.4}$$

为证(4.2)成立,只需证(4.4)式的上、下极限与 ε 无关. 设 ε 是任一给定正数,对任一 δ, $0<\delta<\varepsilon$,我们有

$$\begin{aligned}&\sum_k\left\{\int_{|x|<\varepsilon}x^2\mathrm{d}F_{nk}(x)-\left(\int_{|x|<\varepsilon}x\mathrm{d}F_{nk}(x)\right)^2\right\}\\ &=\sum_k\left\{\int_{|x|<\delta}x^2\mathrm{d}F_{nk}(x)-\left(\int_{|x|<\delta}x\mathrm{d}F_{nk}(x)\right)^2\right\}\\ &\quad+\sum_k\left\{\int_{\delta\leqslant|x|<\varepsilon}x^2\mathrm{d}F_{nk}(x)-\left(\int_{\delta\leqslant|x|<\varepsilon}x\mathrm{d}F_{nk}(x)\right)^2\right.\\ &\quad\left.-2\int_{|x|<\delta}x\mathrm{d}F_{nk}(x)\cdot\int_{\delta\leqslant|x|<\varepsilon}x\mathrm{d}F_{nk}(x)\right\}.\end{aligned}$$

而由(4.1)式,当 $n\to\infty$ 时我们有

$$\begin{aligned}0&\leqslant\sum_k\left\{\int_{\delta\leqslant|x|<\varepsilon}x^2\mathrm{d}F_{nk}(x)-\left(\int_{\delta\leqslant|x|<\varepsilon}x\mathrm{d}F_{nk}(x)\right)^2\right\}\\ &\leqslant\varepsilon^2\sum_k\int_{\delta\leqslant|x|<\varepsilon}\mathrm{d}F_{nk}(x)\leqslant\varepsilon^2\sum_k P\{|X_{nk}|\geqslant\delta\}\to 0\end{aligned}$$

和

$$\sum_k\left|\int_{|x|<\delta}x\mathrm{d}F_{nk}(x)\right|\left|\int_{\delta\leqslant|x|<\varepsilon}x\mathrm{d}F_{nk}(x)\right|\leqslant\delta\varepsilon\sum_k P\{|X_{nk}|\geqslant\delta\}\to 0.$$

因此

$$\sum_k\left\{\int_{|x|<\delta}x^2\mathrm{d}F_{nk}(x)-\left(\int_{|x|<\delta}x\mathrm{d}F_{nk}(x)\right)^2\right\}$$

和

$$\sum_k\left\{\int_{|x|<\varepsilon}x^2\mathrm{d}F_{nk}(x)-\left(\int_{|x|<\varepsilon}x\mathrm{d}F_{nk}(x)\right)^2\right\}$$

的上(下)极限相等.所以由(4.4)可推得(4.2)成立,证毕.

注 定理4.1的结论可改为:对某常数b_n,和$\sum\limits_n X_{n_k}-b_n\xrightarrow{d}N(0,1)$且$\{X_{nk}\}$无穷小的充要条件是(4.1)及对任意的$\tau>0$

$$\sum_k\left\{\int_{|x|<\tau}x^2\mathrm{d}F_{nk}(x)-\left(\int_{|x|<\tau}x\mathrm{d}F_{nk}(x)\right)^2\right\}\to 1.$$

此时$b_n=\sum\limits_k\int_{|x|<c}x\mathrm{d}F_{nk}(x)+o(1)$,其中$c$为任意正数,而且"任意$\tau$"可改为"某$\tau$".

定理4.2 设独立r.v.组列$\{X_{nk}\}$的和$S_n=\sum\limits_k X_{nk}$依分布收敛于d.f.$F(x)$,那么它为正态且$\{X_{nk}\}$满足无穷小条件(2.2)的充要条件是对任一给定的$\varepsilon>0$

$$\sum_k P\{|X_{nk}|\geqslant\varepsilon\}\to 0. \tag{4.5}$$

证 条件显然是必要的.由定理2.4的条件必要性,比较定理2.4(i)与(4.5),即得$F(x)$的Lévy谱函数$L(x)=0(x\neq 0)$.因此$F(x)$是正态分布.

值得注意的是,$\sum\limits_k P\{|X_{nk}|\geqslant\varepsilon\}\to 0$等价于$P(\max\limits_k|X_{nk}|\geqslant\varepsilon)\to 0$.事实上,记$p_{nk}=P(|X_{nk}|\geqslant\varepsilon)$.等价性可以从下列两个不等式直接推出:

$$\begin{aligned}P\left\{\max_k|X_{nk}|\geqslant\varepsilon\right\}&=1-P\left\{\max_k|X_{nk}|<\varepsilon\right\}\\&=1-\prod_k(1-p_{nk}),\end{aligned}$$

$$1-\exp\left\{-\sum_k p_{nk}\right\}\leqslant 1-\prod_k(1-p_{nk})\leqslant\sum_k p_{nk}.$$

4.2 中心极限定理的经典形式

从上面一般的中心极限定理,即可写出Lindeberg,Bernstein,Feller,Lévy和Lyapunov等关于独立r.v.和的经典中心极限定理.

定理4.3(Feller) 设$\{X_n;n\geqslant 1\}$为一列独立r.v.,$F_n(x)$是X_n的d.f.,$\{a_n\}$为一列正数,则

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}P(|X_k|\geqslant\varepsilon a_n)\to 0,\ \forall\,\varepsilon>0, \tag{4.6}$$

$$P\left\{a_n^{-1}\sum_{k=1}^n X_k<x\right\}\xrightarrow{d}\Phi(x) \tag{4.7}$$

当且仅当

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\geqslant \varepsilon a_n}\mathrm{d}F_k(x)\to 0,\ \forall\ \varepsilon>0.\tag{4.8}$$

$$\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{|x|<a_n}x^2\mathrm{d}F_k(x)-\left(\int_{|x|<a_n}x\mathrm{d}F_k(x)\right)^2\right\}\to 1\tag{4.9}$$

和

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|<a_n}x\mathrm{d}F_k(x)\to 0.\tag{4.10}$$

为了证明定理 4.3，只需令 $X_{nk}=X_k/a_n, k=1,2,\cdots,n$，然后利用定理 4.1 即可.

与定理 4.1 相同，条件(4.9)和(4.10)可以改为：对每个 $\varepsilon>0$，

$$\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{|x|<\varepsilon a_n}x^2\mathrm{d}F_k(x)-\left(\int_{|x|<\varepsilon a_n}x\mathrm{d}F_k(x)\right)^2\right\}\to 1,\tag{4.11}$$

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|<\varepsilon a_n}x\mathrm{d}F_k(x)\to 0.\tag{4.12}$$

下列定理给出了一个中心极限定理成立更简单的充分条件.

定理 4.4　设 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是一列独立 r.v.，$\{a_n\}$ 为一列正数，如果

$$\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|<a_n}x^2\mathrm{d}F_k(x)\to 1,\quad \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{|x|<a_n}x\mathrm{d}F_k(x)\right|\to 0,$$

且(4.8)满足，那么(4.7)成立.

定理 4.5(Bernstein-Feller)　设 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是独立 r.v. 序列，X_n 的 d.f. 是 $F_n(x)$. 那么存在常数 $a_n>0$ 和 b_n 使得和

$$\frac{1}{a_n}S_n-b_n=\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}X_k-b_n$$

依分布收敛于标准正态分布 $\Phi(x)$，且无穷小条件

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}P\{|X_k|\geqslant \varepsilon a_n\}\to 0,\quad \forall\ \varepsilon>0,$$

成立的充要条件是存在数 $c_n>0$，$c_n\to\infty$ 且

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\geqslant c_n}\mathrm{d}F_k(x)\to 0,\tag{4.13}$$

$$\frac{1}{c_n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{|x|<c_n}x^2\mathrm{d}F_k(x)-\left(\int_{|x|<c_n}x\mathrm{d}F_k(x)\right)^2\right\}\to\infty.\tag{4.14}$$

当满足上述性质的数列 $\{c_n\}$ 存在时，可取

$$a_n^2=\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{|x|<c_n}x^2\mathrm{d}F_k(x)-\left(\int_{|x|<c_n}x\mathrm{d}F_k(x)\right)^2\right\},\tag{4.15}$$

$$b_n=\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|<c_n}x\mathrm{d}F_k(x).\tag{4.16}$$

证　条件必要　由引理3.1知 $a_n\to\infty$, $a_{n+1}/a_n\to1$. 如记 $X_{nk}=X_k/a_n$, 那么由定理4.1, 对任给的 $\varepsilon>0$ 我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\geqslant\varepsilon a_n}\mathrm{d}F_k(x)\to0, \tag{4.17}$$

$$\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{|x|<\varepsilon a_n}x^2\mathrm{d}F_k(x)-\left(\int_{|x|<\varepsilon a_n}x\mathrm{d}F_k(x)\right)^2\right\}\to1. \tag{4.18}$$

我们来证存在 $\varepsilon_n>0$, 使得 $\varepsilon_n\to0$, $\varepsilon_n a_n\to\infty$ 且(4.17)、(4.18)中的 ε 换为 ε_n 时仍成立. 事实上, 我们只需证明: 若 $x_n(\varepsilon)\to x$ 对任给 $\varepsilon>0$ 成立, 则必有 $\varepsilon_n>0$, 使得 $\varepsilon_n\to0$ 且 $x_n(\varepsilon_n)\to x$. 又由代换 $y_n(\varepsilon)=|x_n(\varepsilon)-x|$, 不妨设 $x=0$ 且 $x_n(\varepsilon)\geqslant0$. 为证这一结论, 令 $z_n(\varepsilon)=\max\limits_{k\geqslant n}x_k(\varepsilon)$. 那么 $z_n(\varepsilon)\downarrow0\,(n\to\infty)$. 这样对每一 m, 存在增加的整数列 n_m, 使当 $n\geqslant n_m$ 时有

$$z_n(2^{-m})\leqslant2^{-m},\quad a_n^{-1/2}\leqslant2^{-m+1}.$$

对 $n_{m-1}\leqslant n<n_m$, 令 $\varepsilon_n=2^{1-m}$. 这样当 $m\to\infty$ 时有

$$\max_{n_{m-1}\leqslant n<n_m}z_n(\varepsilon_n)\leqslant z_{n_{m-1}}(\varepsilon_n)=z_{n_{m-1}}(2^{1-m})\leqslant2^{1-m}\to0,$$

也即 $\varepsilon_n\to0$, $\varepsilon_n a_n\geqslant a_n^{1/2}\to\infty$ 且 $z_n(\varepsilon_n)\to0$. 最后, 令 $c_n=\varepsilon_n a_n$ 即得证条件必要.

条件充分　设有 $c_n\to\infty$ 且满足(4.13)和(4.14). 令 a_n, b_n 如(4.15)和(4.16). 则由(4.14)得 $c_n=o(a_n)$. 现在来验证对于 $X_{nk}=X_k/a_n$, 定理4.1的条件被满足. 首先, 对任给的 $\varepsilon>0$, 当 n 充分大时 $c_n\leqslant\varepsilon a_n$. 由(4.13), 我们有

$$\sum_{k}\int_{|x|\geqslant\varepsilon a_n}\mathrm{d}F_k(x)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\geqslant c_n}\mathrm{d}F_k(x)\to0.$$

记

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{|x|<\varepsilon a_n}x^2\mathrm{d}F_k(x)-\left(\int_{|x|<\varepsilon a_n}x\mathrm{d}F_k(x)\right)^2\right\}\\&=\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{|x|<c_n}x^2\mathrm{d}F_k(x)-\left(\int_{|x|<c_n}x\mathrm{d}F_k(x)\right)^2\right\}\\&\quad+\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{c_n\leqslant|x|<\varepsilon a_n}x^2\mathrm{d}F_k(x)-\left(\int_{c_n\leqslant|x|<\varepsilon a_n}x\mathrm{d}F_k(x)\right)^2\right\}\\&\quad-\frac{2}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{|x|<c_n}x\mathrm{d}F_k(x)\int_{c_n\leqslant|x|<\varepsilon a_n}x\mathrm{d}F_k(x)\right\}\\&=I_1+I_2+I_3,\end{aligned}$$

其中

$$I_2\leqslant\varepsilon^2\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\geqslant c_n}\mathrm{d}F_k(x)\to0,$$

$$|I_3| \leqslant 2\varepsilon c_n a_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| \geqslant \tau_n} \mathrm{d}F_k(x) \to 0.$$

而 $I_1 = 1$. 因此 $I \to 1$. 利用定理 4.1 后的注就得证条件充分.

到目前为止，我们没有对 r.v. 的矩作任何限制，下面给出在某种矩存在的条件下的中心极限定理.

定理 4.6(Lindeberg-Feller)　设独立 r.v. 序列 $\{X_n\}$ 中至少有一 r.v. 服从非退化分布，$EX_n = a_n$，$\mathrm{Var}X_n = \sigma_n^2$ 有限. 记 r.v. X_n 的 d.f. 为 $F_n(x)$，

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2, \quad G_n(x) = P\left\{\frac{1}{\sqrt{B_n}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - a_k) < x\right\}.$$

那么，使得当 $n \to \infty$ 时

$$\frac{1}{B_n} \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \sigma_k^2 \to 0, \tag{4.19}$$

$$G_n(x) \xrightarrow{d} \Phi(x) \tag{4.20}$$

成立的充要条件是 Lindeberg 条件成立：对任给的 $\varepsilon > 0$，

$$\Lambda_n(\varepsilon) = \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x - a_k| \geqslant \varepsilon\sqrt{B_n}} (x - a_k)^2 \mathrm{d}F_k(x) \to 0. \tag{4.21}$$

证　不失一般性可设 $EX_n = a_n = 0$.

条件必要　由(4.19)可得对任给的 $\varepsilon > 0$，

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} P\{|X_k| \geqslant \varepsilon\sqrt{B_n}\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 B_n} \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \sigma_k^2 \to 0.$$

对 $X_{nk} = X_k / \sqrt{B_n}$ 应用定理 4.1 的条件必要性，对任给的 $\varepsilon > 0$ 有

$$\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \left\{\int_{|x| < \varepsilon\sqrt{B_n}} x^2 \mathrm{d}F_k(x) - \left(\int_{|x| < \varepsilon\sqrt{B_n}} x \mathrm{d}F_k(x)\right)^2\right\} \to 1.$$

由此即可推得

$$\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \left\{\int_{|x| \geqslant \varepsilon\sqrt{B_n}} x^2 \mathrm{d}F_k(x) + \left(\int_{|x| < \varepsilon\sqrt{B_n}} x \mathrm{d}F_k(x)\right)^2\right\} \to 0.$$

这样就有(4.21)成立.

条件充分　由于

$$\sigma_k^2 = \int_{|x| < \varepsilon\sqrt{B_n}} x^2 \mathrm{d}F_k(x) + \int_{|x| \geqslant \varepsilon\sqrt{B_n}} x^2 \mathrm{d}F_k(x)$$

$$\leqslant \varepsilon^2 B_n + \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| \geqslant \varepsilon\sqrt{B_n}} x^2 \mathrm{d}F_k(x),$$

我们有

$$\frac{1}{B_n}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_k^2 \leqslant \varepsilon^2 + \Lambda_n(\varepsilon).$$

故由(4.21)及ε的任意性知(4.19)被满足.对$X_{nk} = X_k/\sqrt{B_n}$来验证定理4.1的条件.首先

$$\sum_{k=1}^{n} P\left\{|X_k| \geqslant \varepsilon\sqrt{B_n}\right\} \leqslant (\varepsilon^2 B_n)^{-1}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\geqslant\varepsilon\sqrt{B_n}} x^2 \mathrm{d}F_k(x) \to 0.$$

即(4.1)被满足.其次不妨设$\varepsilon < 1$,记(4.2)左边为$\mathrm{I}_n(\varepsilon)$,那么此时

$$\begin{aligned}|\mathrm{I}_n(1) - \mathrm{I}_n(\varepsilon)| &\leqslant \frac{1}{B_n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\int_{\varepsilon\sqrt{B_n}\leqslant|x|<\sqrt{B_n}} x^2\mathrm{d}F_k(x)\right.\\ &\quad\left. + 2\left|\int_{\varepsilon\sqrt{B_n}\leqslant|x|<\sqrt{B_n}} x\mathrm{d}F_k(x)\right|\right\}\\ &\leqslant 3\sum_{k=1}^{n} P\left\{|X_k| \geqslant \varepsilon\sqrt{B_n}\right\} \to 0.\end{aligned}$$

而由(4.21)

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n(1) &= \frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{|x|<\sqrt{B_n}} x^2\mathrm{d}F_k(x) - \left(\int_{|x|\geqslant\sqrt{B_n}} x\mathrm{d}F_k(x)\right)^2\right\}\\ &= 1 - \Lambda_n(1) - \frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{|x|\geqslant\sqrt{B_n}} x\mathrm{d}F_k(x)\right)^2 \to 1.\end{aligned}$$

这就得(4.2)被满足.从上述证明可知(4.3)对$a = 0$也成立.由定理4.1得条件充分.

注　$X_1, X_2, \cdots$中至少有一个非退化的r.v.意味着当n充分大时,$B_n > 0$.另外(4.19)表明$B_n \to \infty$.

作为Linderbeg Feller定理的直接推论,有

定理4.7(Lévy)　如果$\{X_n\}$是一列i.i.d.r.v.,$\mu = EX_n$,$\sigma^2 = \mathrm{Var}X_n < \infty$,那么

$$P\left\{\frac{1}{\sqrt{n}\,\sigma}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu\right) < x\right\} \xrightarrow{d} \Phi(x).$$

定理4.8(Lyapunov)　如果$\{X_n\}$是列独立r.v.,其中至少有一个r.v.服从非退化分布,设对某$\delta > 0$,$E|X_n|^{2+\delta} < \infty$,$n \geqslant 1$.令

$$\mu_n = EX_n,\quad \sigma_n^2 = \mathrm{Var}X_n,\quad B_n = \sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2,$$

$$F_n(x) = P\left\{\frac{1}{B_n^{1/2}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu_k) < x\right\}.$$

如果

$$B_n^{-1-\frac{\delta}{2}}\sum_{k=1}^{n}E|X_k - m_k|^{2+\delta} \to 0,$$

那么 $F_n(x) \xrightarrow{d} \Phi(x)$.

§5 中心极限定理的收敛速度

5.1 用特征函数的接近度来估计分布函数的差

设 $\{X_n; n \geqslant 1\}$ 是独立 r.v. 序列，$EX_n = 0$，$\sigma_n^2 = EX_n^2 < \infty$，$B_n = \sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$.

上节中，讨论了正则化和 $B_n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}X_k$ 的 d.f. $F_n(x)$ 收敛于标准正态分布 $\Phi(x)$ 的条件，这一节我们来考察

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|F_n(x) - \Phi(x)| \tag{5.1}$$

趋于零的速度. 由于 d.f. 与 c.f. 相互唯一确定，自然地，当 c.f. 彼此接近时，我们期望 d.f. 也很接近. 下面的 Esseen 定理是关于这方面最为有用的一个结果.

定理 5.1 设 $F(x)$ 和 $G(x)$ 分别是 $\mathbf{R}^1$ 上的有界不减和有界变差函数，且 $F(-\infty) = G(-\infty)$. 又记

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF(x),\quad g(t) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dG(x).$$

那么对任意正数 T，当 $b > \frac{1}{2\pi}$ 时有

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|F(x) - G(x)| \leqslant b\int_{-T}^{T}\left|\frac{f(t) - g(t)}{t}\right|dt$$

$$+ bT\sup_{-\infty<x<\infty}\int_{|y|\leqslant c(b)/T}|G(x+y) - G(x)|dy, \tag{5.2}$$

其中 $c(b)$ 是仅与 b 有关的正常数，可取它为方程

$$\int_0^{c(b)/4}\frac{\sin^2 u}{u^2}du = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8b}$$

的根.

定理 5.1 的证明从略(参见[19]).

推论 5.1 设 $\mathbf{R}^1$ 上函数 $F(x)$ 是有界不减的，且 $G(x)$ 是有界变差的可微函数. 记导函数为 $G'(x)$. 假设 $f(t)$、$g(t)$ 如定理 5.1，$F(-\infty) = G(-\infty)$，$F(+\infty) = G(+\infty)$ 且设 $\sup_x|G'(x)| \leqslant C$，则对任意正数 T，当 $b > \frac{1}{2\pi}$ 时，有

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|F(x)-G(x)|\leqslant b\int_{-T}^{T}\left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right|\mathrm{d}t+\gamma(b)\frac{C}{T},\quad(5.3)$$

其中 $\gamma(b)$ 是仅与 b 有关的正常数.

事实上,此时(5.2)中右边第二项不超过

$$bT\sup_{x}\int_{|y|\leqslant c(b)/T}|G(x+y)-G(x)|\mathrm{d}y$$

$$\leqslant bT\int_{|y|\leqslant c(b)/T}C|y|\mathrm{d}y=\gamma(b)C/T,$$

其中 $\gamma(b)=b(c(b))^2$. 因此(5.3)式成立.

推论 5.1 在中心极限定理收敛速度的研究中起着关键作用. 事实上我们将选取 $G(x)$ 为标准正态 d.f. $\Phi(x)$, $F(x)$ 为 r.v. 规范化和的 d.f.

5.2　Esseen 与 Berry-Esseen 不等式

为给出(5.1)的估计,需要下述引理:

引理 5.1　设 $\{X_n;n\geqslant1\}$ 是独立 r.v. 序列, $EX_n=0$, 又记

$$\sigma_k^2=EX_k^2,\quad B_n=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2,\quad L_n=B_n^{-3/2}\sum_{k=1}^{n}E|X_k|^3,$$

$S_n=B_n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}X_k$ 的 c.f. 为 $f_n(t)$, 则当 $|t|\leqslant1/(4L_n)$ 时有

$$|f_n(t)-\mathrm{e}^{-t^2/2}|\leqslant16L_n|t|^3\mathrm{e}^{-t^2/3}.\quad(5.4)$$

证　可以认为 $E|X_k|^3<\infty(k=1,2,\cdots,n)$. 否则,(5.4)自然成立.

1°　当 $\frac{1}{2}L_n^{-1/3}\leqslant|t|\leqslant\frac{1}{4L_n}$ 时,只需证

$$|f_n(t)|^2\leqslant\mathrm{e}^{-2t^2/3}.\quad(5.5)$$

事实上,此时 $8L_n|t|^3\geqslant1$, 故由(5.5)式就可推出

$$|f_n(t)-\mathrm{e}^{-t^2/2}|\leqslant|f_n(t)|+\mathrm{e}^{-t^2/2}\leqslant2\mathrm{e}^{-t^2/3}\leqslant16L_n|t|^3\mathrm{e}^{-t^2/3}.$$

为证(5.5)式成立,记 $v_k(t)=E\mathrm{e}^{itX_k}(k=1,\cdots,n)$, 并设 Y_k 是与 X_k 独立同分布的 r.v., 那么 $\tilde{X}_k=X_k-Y_k$ 的 c.f. 是 $|v_k(t)|^2$. 它的均值为 0, 方差为 $2\sigma_k^2$ 且 $E|\tilde{X}_k|^3\leqslant8E|X_k|^3$. 所以有展开式

$$|v_k(t)|^2=1+itE\tilde{X}_k+\frac{(it)^2}{2}E\tilde{X}_k^2+\frac{(it)^3}{3!}E\tilde{X}_k^3\mathrm{e}^{it\theta\tilde{X}_k},$$

其中 $|\theta|\leqslant1$. 由此即得

$$|v_k(t)|^2\leqslant1-\sigma_k^2t^2+\frac{4}{3}|t|^3E|X_k|^3\leqslant\exp\left\{-\sigma_k^2t^2+\frac{4}{3}|t|^3E|X_k|^3\right\}.$$

因此当 $\frac{1}{2}L_n^{-1/3}\leqslant|t|\leqslant\frac{1}{4L_n}$ 时,就有

$$|f_n(t)|^2 = \prod_{k=1}^{n} \left| v_k\left(\frac{t}{\sqrt{B_n}}\right) \right|^2 \leqslant \exp\left\{-t^2 + \frac{4}{3}L_n|t|^3\right\}$$

$$\leqslant e^{-2t^2/3}.$$

得证(5.5)式成立.

2° 当 $|t| \leqslant \frac{1}{4L_n}$ 且 $|t| \leqslant \frac{1}{2}L_n^{-1/3}$ 时,对于 $k=1,\cdots,n$,

$$\frac{\sigma_k}{\sqrt{B_n}}|t| \leqslant \frac{(E|X_k|^3)^{1/3}}{\sqrt{B_n}}|t| \leqslant L_n^{1/3}|t| \leqslant \frac{1}{2}.$$

对于 c.f. $v_k(t)$,在 $E|X_k|^3 < \infty$ 时,由 Taylor 展开式可推得

$$v_k\left(\frac{t}{\sqrt{B_n}}\right) = 1 - \gamma_k, \quad \gamma_k = \frac{\sigma_k^2 t^2}{2B_n} + \theta_k' \frac{E|X_k|^3}{6B_n^{3/2}}|t|^3,$$

其中 $|\theta_k'| \leqslant 1$. 由此 $|\gamma_k| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \frac{1}{6}$,且

$$|\gamma_k|^2 \leqslant 2\left(\frac{\sigma_k^2 t^2}{2B_n}\right)^2 + 2\left(\frac{E|X_k|^3}{6B_n^{3/2}}|t|^3\right)^2 \leqslant \frac{E|X_k|^3}{3B_n^{3/2}}|t|^3.$$

所以

$$\text{Log}\, v_k\left(\frac{t}{\sqrt{B_n}}\right) = -\gamma_k + \theta_k''\gamma_k^2 = -\frac{\sigma_k^2 t^2}{2B_n} + \theta_k'' \frac{E|X_k|^3}{2B_n^{3/2}}|t|^3,$$

其中 $|\theta_k''| \leqslant 1$. 因此得

$$\text{Log}\, f_n(t) = -\frac{t^2}{2} + \theta \frac{L_n}{2}|t|^3, \quad |\theta| \leqslant 1.$$

由假设 $L_n|t|^3 < \frac{1}{8}$ 可推得 $\exp\left\{\frac{1}{2}L_n|t|^3\right\} < 2$. 利用它即有

$$|f_n(t) - e^{-t^2/2}| \leqslant e^{-t^2/2}\,|e^{\theta L_n|t|^3/2} - 1|$$

$$\leqslant \frac{L_n}{2}|t|^3 \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + \frac{L_n}{2}|t|^3\right\}$$

$$\leqslant L_n|t|^3 e^{-t^2/2} \leqslant L_n|t|^3 e^{-t^2/3}.$$

引理证毕.

定理 5.2(Esseen 不等式) 在引理 5.1 的条件下,若记

$$F_n(x) = P\left\{\frac{1}{\sqrt{B_n}}\sum_{k=1}^{n} X_k < x\right\},$$

则有

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant A_1 L_n, \tag{5.6}$$

其中 A_1 是正的常数.

证　d.f. $F_n(x)$ 和正态分布 $\Phi(x)$ 显然满足推论 5.1 的条件，且 $\sup|\Phi'(x)| = 1/\sqrt{2\pi}$. 若取 $b = 1/\pi, T = 1/(4L_n)$，由(5.3)式及引理 5.1 就有

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{|t| \leqslant 1/(4L_n)} \left|\frac{f_n(t) - e^{-t^2/2}}{t}\right| dt + A_0 L_n$$

$$\leqslant \frac{32}{\pi} L_n \int_{0\leqslant t\leqslant 1/(4L_n)} t^2 e^{-t^2/3} dt + A_0 L_n \leqslant A_1 L_n.$$

特别，对独立同分布情形，我们有

定理 5.3(Berry-Esseen **不等式**)　设 $\{X_n; n \geqslant 1\}$ 是 i.i.d. r.v. 列，$EX_n = 0$，$EX_n^2 = \sigma^2 > 0$，$E|X_n|^3 < \infty$. 记 $\rho = E|X|^3/\sigma^3$，则有

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \left| P\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n X_k < x\right\} - \Phi(x)\right| \leqslant A_2 \frac{\rho}{\sqrt{n}}, \qquad (5.7)$$

其中 A_2 是正的常数.

注 5.1　估计(5.6)和(5.7)的阶 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 是不能改进的. 考察 i.i.d. r.v. 列 $\{X_n; n \geqslant 1\}$，其中 $P\{X_n = 1\} = P\{X_n = -1\} = \frac{1}{2}$. 此时 $EX_n = 0$，$EX_n^2 = E|X_n|^3 = 1$. 利用 Stirling 公式 $n! = \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n} e^{\theta}\left(|\theta| \leqslant \frac{1}{12n}\right)$，可以求得当 n 为偶数时

$$P\left\{\sum_{k=1}^n X_k = 0\right\} = C_n^{n/2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}}(1 + o(1)),$$

这就是说，d.f. $F_n(x) = P\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n X_k \leqslant x\right\}$ 在点 $x = 0$ 处有一跳跃，其跃度等于 $\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}(1 + o(1))$，即在点 $x = 0$ 的邻域中，d.f. $F_n(x)$ 用连续函数逼近时，其精度不可能超过 $\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}(1 + o(1))$，其中 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0.398\ 9\cdots$.

注 5.2　关于(5.6)和(5.7)式中系数 A_1 和 A_2 的估计，早在 1941 年 Berry 就证得 $A_2 \leqslant 1.88$；Shiganov(1982)[*] 得到如下的进一步结果：$A_2 \leqslant 0.765\ 5$，$A_1 \leqslant 0.791\ 5$.

5.3　Esseen **不等式的推广**

Esseen 不等式是在三阶矩存在的假设下建立起来的，实际上在更弱的矩假设下，Esseen 不等式仍然成立.

---

*) Shiganov, I. S., Vsesoyuz. Nauch-Issled. Inst. Sistem. Issled., Moscow, 1982.

令 G 是满足下列两个条件的函数 $g(x)$ 的集合：

(1) $g(x)$ 是在 $(0,\infty)$ 上非负单调不减的偶函数；

(2) $x/g(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上单调不减.

定理 5.4 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立 r.v.，$EX_j = 0$，且对某个 $g \in G$，$EX_j^2 g(X_j) < \infty$，$j = 1,2,\cdots,n$. 令

$$\sigma_j^2 = \operatorname{Var} X_j,\quad B_n = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2,\quad F_n(x) = P\left\{\frac{1}{B_n^{1/2}} \sum_{j=1}^{n} X_j < x\right\},$$

那么存在正常数 A，

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{A}{B_n g(B_n^{1/2})} \sum_{j=1}^{n} EX_j^2 g(X_j). \tag{5.8}$$

证 引进截尾 r.v.

$$\overline{X}_j = \begin{cases} X_j, & |X_j| < B_n^{1/2}, \\ 0, & |X_j| \geqslant B_n^{1/2}, \end{cases} \quad j = 1,2,\cdots,n.$$

它们是有界 r.v.，因此 $\overline{X}_j$ 的所有阶矩存在有限. 记

$$m_j = E\overline{X}_j, \quad \overline{\sigma}_j^2 = \operatorname{Var} \overline{X}_j,$$

$$\overline{B}_n = \sum_{j=1}^{n} \overline{\sigma}_j^2, \quad V_j(x) = P(X_j < x).$$

已知 $EX_j = 0$，我们有

$$0 \leqslant \sigma_j^2 - \overline{\sigma}_j^2 = \int_{|x| \geqslant B_n^{1/2}} x^2 \mathrm{d}V_j(x) + \left(\int_{|x| < B_n^{1/2}} x \mathrm{d}V_j(x)\right)^2$$

$$\leqslant 2\int_{|x| \geqslant B_n^{1/2}} x^2 \mathrm{d}V_j(x) \leqslant \frac{2}{g(B_n^{1/2})} \int_{|x| \geqslant B_n^{1/2}} x^2 g(x) \mathrm{d}V_j(x)$$

$$\leqslant \frac{2}{g(B_n^{1/2})} EX_j^2 g(X_j). \tag{5.9}$$

如果 $\overline{B}_n \leqslant B_n/4$，那么 $B_n - \overline{B}_n \geqslant 3B_n/4$ 且由(5.9)

$$1 \leqslant \frac{8}{3B_n g(B_n^{1/2})} \sum_{j=1}^{n} EX_j^2 g(X_j).$$

令 $A = 8/3$，(5.8) 成立. 下面假设 $\overline{B}_n > B_n/4$. 记

$$Z_n = \frac{1}{B_n^{1/2}} \sum_{j=1}^{n} X_j, \quad Y_n = \frac{1}{B_n^{1/2}} \sum_{j=1}^{n} \overline{X}_j, \quad \overline{Z}_n = \frac{1}{\overline{B}_n^{1/2}} \sum_{j=1}^{n} (\overline{X}_j - m_j).$$

由于对任何实数 x

$$(Z_n < x) \subseteq (Y_n < x) \cup (|X_1| \geqslant B_n^{1/2}) \cup \cdots \cup (|X_n| \geqslant B_n^{1/2}),$$

$$(Y_n < x) \subseteq (Z_n < x) \cup (|X_1| \geqslant B_n^{1/2}) \cup \cdots \cup (|X_n| \geqslant B_n^{1/2}),$$

因此

$$P(Z_n < x) \leqslant P(Y_n < x) + \sum_{j=1}^{n} P(|X_j| \geqslant B_n^{1/2}),$$

$$P(Y_n < x) \leqslant P(Z_n < x) + \sum_{j=1}^{n} P(|X_j| \geqslant B_n^{1/2}).$$

于是

$$\sup_x |F_n(x) - P(Y_n < x)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} P(|X_j| \geqslant B_n^{1/2}).$$

此外，对任何实数 $x, p > 0$ 和 q，

$$\begin{aligned} |F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant\ & |F_n(x) - P(Y_n < x)| \\ & + |P(pY_n + q < px + q) - \Phi(px + q)| \\ & + |\Phi(px + q) - \Phi(x)|. \end{aligned}$$

令 $p = (B_n/\overline{B}_n)^{1/2}, q = -\sum_{j=1}^{n} \overline{m}_j/\overline{B}_n^{1/2}$. 那么 $pY_n + q = Z_n$ 且

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant T_1 + T_2 + T_3, \tag{5.10}$$

其中

$$T_1 = \sum_{j=1}^{n} P(|X_j| \geqslant B_n^{1/2}),$$

$$T_2 = \sup_x \left| P(Z_n < px + q) - \Phi\left(\left(\frac{B_n}{\overline{B}_n}\right)^{1/2} x - \sum_{j=1}^{n} \overline{m}_j/\overline{B}_n^{1/2} \right) \right|,$$

$$T_3 = \sup_x \left| \Phi\left(\left(\frac{B_n}{\overline{B}_n}\right)^{1/2} x - \sum_{j=1}^{n} \overline{m}_j/\overline{B}_n^{1/2} \right) - \Phi(x) \right|.$$

由 Chebyshev 不等式得

$$T_1 \leqslant \frac{1}{B_n g(B_n^{1/2})} \sum_{j=1}^{n} EX_j^2 g(X_j). \tag{5.11}$$

应用定理 5.2 于 Z_n，

$$T_2 \leqslant \frac{A_1}{\overline{B}_n^{3/2}} \sum_{j=1}^{n} E|\overline{X}_j - \overline{m}_j|^3.$$

由假设 $x/g(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上单调不减，所以

$$\begin{aligned} E|\overline{X}_j - \overline{m}_j|^3 & \leqslant 4(E|\overline{X}_j|^3 + |\overline{m}_j|^3) \leqslant 8E|\overline{X}_j|^3 \\ & = 8\int_{|x| < B_n^{1/2}} \frac{|x|}{g(x)} x^2 g(x) \mathrm{d}V_j(x) \leqslant \frac{8B_n^{1/2}}{g(B_n^{1/2})} EX_j^2 g(X_j). \end{aligned}$$

注意到 $\overline{B}_n > B_n/4$，我们有

$$T_2 \leqslant \frac{A_2}{B_n g(B_n^{1/2})} \sum_{j=1}^{n} EX_j^2 g(X_j). \tag{5.12}$$

最后证明

$$T_3 < \frac{A_3}{B_n g(B_n^{1/2})} \sum_{j=1}^{n} EX_j^2 g(X_j). \tag{5.13}$$

为此需要下列初等结果.

引理 5.2

$$\sup_x |\Phi(px) - \Phi(x)| \leqslant \begin{cases} (p-1)/(2\pi e)^{1/2}, & p \geqslant 1, \\ (p^{-1}-1)/(2\pi e)^{1/2}, & 0 < p < 1, \end{cases}$$

$$\sup_x |\Phi(x+q) - \Phi(x)| \leqslant \frac{|q|}{(2\pi)^{1/2}}, \qquad \text{对每个 } q.$$

应用上述引理，

$$T_3 \leqslant \frac{1}{2\pi}\left\{(B_n/\bar{B}_n)^{1/2} - 1 + \sum_{j=1}^{n} |m_j| / B_n^{1/2}\right\}.$$

由于 $g(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上单调不减，

$$|m_j| = \left|\int_{|x|<B_n^{1/2}} x \mathrm{d}V_j(x)\right| \leqslant \int_{|x|\geqslant B_n^{1/2}} |x| \mathrm{d}V_j(x) \leqslant \frac{1}{B_n^{1/2} g(B_n^{1/2})} EX_j^2 g(X_j).$$

此外由(5.9)和 $\bar{B}_n > B_n/4$，我们有

$$(B_n/\bar{B}_n)^{1/2} - 1 = (B_n - \bar{B}_n)/(B_n^{1/2} + \bar{B}_n^{1/2})\bar{B}_n^{1/2} \leqslant \frac{A_4}{B_n g(B_n^{1/2})} \sum_{j=1}^{n} EX_j^2 g(X_j).$$

这样(5.13)成立. 证毕.

推论 5.2 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是独立 r.v.，$EX_j = 0$，$E|X_j|^{2+\delta} < \infty$，$0 < \delta \leqslant 1$，$j = 1,2,\cdots,n$. 那么存在正常数 A，

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{A}{B_n^{1+\delta/2}} \sum_{j=1}^{n} E|X_j|^{2+\delta}. \tag{5.14}$$

定理 5.5 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是独立、具有零均值和有限方差的 r.v.，X_j 的 d.f. 为 $V_j(x)$. 令 $\varepsilon > 0$，

$$\Lambda_n(\varepsilon) = \frac{1}{B_n} \sum_{j=1}^{n} \int_{|x|\geqslant \varepsilon B_n^{1/2}} x^2 \mathrm{d}V_j(x),$$

$$l_n(\varepsilon) = \frac{1}{B_n^{3/2}} \sum_{j=1}^{n} \int_{|x|<\varepsilon B_n^{1/2}} |x|^3 \mathrm{d}V_j(x),$$

那么存在正常数 A，

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant A(\Lambda_n(\varepsilon) + l_n(\varepsilon)). \tag{5.15}$$

证 定义 $g(x) = |x| \wedge B_n^{1/2}$，则 $g \in G$ 且由定理 5.4 知

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant A(\Lambda_n(1) + l_n(1)).$$

此外，如果 $0 < \varepsilon \leqslant 1$，那么 $\Lambda_n(1) \leqslant \Lambda_n(\varepsilon)$，$l_n(1) \leqslant l_n(\varepsilon) + \Lambda_n(\varepsilon)$；如果 $\varepsilon > 1$，那么 $l_n(1) \leqslant l_n(\varepsilon)$，$\Lambda_n(1) \leqslant l_n(\varepsilon) + \Lambda_n(\varepsilon)$. 因此对任何 $\varepsilon > 0$，$\Lambda_n(1) +$

$l_n(1) \leqslant 2(\Lambda_n(\varepsilon) + l_n(\varepsilon))$. 证毕.

注　Lindeberg Feller 中心极限定理可以由定理5.5推出. 以上定理尽管对三阶矩的存在性没有作要求，但总设方差存在. 实际上，我们可以对矩的存在性不作任何假设而将 Esseen 不等式加以推广(参见[19]).

5.4　非一致估计

考虑两个 d.f. $F(x)$ 和 $G(x)$，记 $\Delta(x) = F(x) - G(x)$. 显然当 $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$ 时 $\Delta(x) \to 0$. 如果 $F(x)$ 和 $G(x)$ 的均值为 0，方差为 1，则由 Chebyshev 不等式

$$|\Delta(x)| \leqslant x^{-2},\ x \neq 0.$$

这表明 $\Delta(x) = O(x^{-2})(|x| \to \infty)$. 进而，如果 $G(x)$ 是标准正态 d.f.，我们有如下更具体的结果.

引理 5.3　假设 $\Phi(x)$ 是标准正态 d.f.，$p > 0$，d.f. $F(x)$ 满足 $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^p \mathrm{d}F(x) < \infty$. 如果 $0 < \Delta = \sup\limits_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant e^{-1/2}$，那么对任何 x，

$$|F(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{c(p)\Delta\left(\log \frac{1}{\Delta}\right)^{p/2} + \lambda_p}{1 + |x|^p}, \tag{5.16}$$

其中 $c(p)$ 是依赖于 p 的正常数，

$$\lambda_p = \left|\int_{-\infty}^{\infty} |x|^p \mathrm{d}F(x) - \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p \mathrm{d}\Phi(x)\right|. \tag{5.17}$$

证　令 $a \geqslant 1$ 使得 $\pm a$ 是 $F(x)$ 的连续点，那么

$$\int_{-a}^{a} |x|^p \mathrm{d}F(x) = \int_{-a}^{a} |x|^p \mathrm{d}(F(x) - \Phi(x)) + \int_{-a}^{a} |x|^p \mathrm{d}\Phi(x)$$

$$\geqslant -4a^p\Delta + \int_{-a}^{a} |x|^p \mathrm{d}\Phi(x),$$

$$\int_{|x| \geqslant a} |x|^p \mathrm{d}F(x) \leqslant \lambda_p + 4a^p\Delta + \int_{|x| \geqslant a} |x|^p \mathrm{d}\Phi(x).$$

如果 $x \geqslant a$，则

$$x^p(\Phi(x) - F(x)) \leqslant \int_{|y| \geqslant a} |y|^p \mathrm{d}F(y)$$

$$\leqslant \lambda_p + 4a^p\Delta + \int_{|y| \geqslant a} |y|^p \mathrm{d}\Phi(y),$$

$$x^p(F(x) - \Phi(x)) \leqslant \int_{|y| \geqslant a} |y|^p \mathrm{d}\Phi(y).$$

因此，对 $x \geqslant a$，

$$|x|^p|F(x)-\Phi(x)| \leqslant \lambda_p + 4a^p\Delta + \int_{|y|\geqslant a}|y|^p\mathrm{d}\Phi(y). \tag{5.18}$$

类似地，当 $x\leqslant -a$ 时，(5.18) 也成立，从而(5.18) 对 $|x|\geqslant a$ 成立. 另外，当 $|x|<a$ 时，(5.18) 显然成立. 这样既然 $a\geqslant 1$，我们对所有 x 得到

$$(1+|x|^p)|F(x)-\Phi(x)| \leqslant \lambda_p + 5a^p\Delta + \int_{|y|\geqslant a}|y|^p\mathrm{d}\Phi(y). \tag{5.19}$$

由于(5.19)的右边是 a 的连续函数，因此(5.19)对所有 $a\geqslant 1$ 都成立. 令

$$I_p(a) = a^{1-p}\mathrm{e}^{a^2/2}\int_a^\infty y^p\mathrm{e}^{-y^2/2}\mathrm{d}y,\quad K_p=\sup_{a\geqslant 1}I_p(a).$$

不难看出，$K_p<\infty$ 且

$$\int_{|y|\geqslant a}|y|^p\mathrm{d}\Phi(y) = 2^{1/2}\pi^{-1/2}\int_a^\infty y^p\mathrm{e}^{-y^2/2}\mathrm{d}y \leqslant K_p 2^{1/2}\pi^{-1/2}a^{p-1}\mathrm{e}^{-a^2/2}.$$

令 $a=(2\log\frac{1}{\Delta})^{1/2}$. 既然 $0<\Delta\leqslant \mathrm{e}^{-1/2}$，那么 $a\geqslant 1$. 从而由(5.19)得对所有 x，

$$(1+|x|^p)|F(x)-\Phi(x)| \leqslant c(p)\Delta\left(\log\frac{1}{\Delta}\right)^{p/2} + \lambda_p,$$

其中 $c(p)=2^{p/2}(5+K_p2^{1/2}\pi^{-1/2})$. 证毕.

特别，当 $p=2$ 时有

引理 5.4 设 d.f. $F(x)$ 满足 $\int_{-\infty}^{\infty}x^2\mathrm{d}F(x)=1$. 如果 $0<\Delta\leqslant \mathrm{e}^{-1/2}$，那么对所有 x，

$$|F(x)-\Phi(x)| \leqslant \frac{A\Delta\left(\log\frac{1}{\Delta}\right)}{1+x^2}, \tag{5.20}$$

其中 $A=2(5+2\mathrm{e}^{1/2}\pi^{-1/2}\Gamma(3/2))<16.5$.

将上述引理应用到独立 r.v. 正则化和的 d.f. 上可以得到

定理 5.6 设 $\{X_n\}$ 是一列独立 r.v.，具有零均值和有限方差. 记

$$B_n=\sum_{j=1}^n \mathrm{Var}X_j,\quad F_n(x)=P\left(B_n^{-1/2}\sum_{j=1}^n X_j<x\right),$$
$$\Delta_n=\sup_x|F_n(x)-\Phi(x)|.$$

如果存在 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时 $0<\Delta_n<\mathrm{e}^{-1/2}$，那么对所有 x 和 $n\geqslant n_0$

$$|F_n(x)-\Phi(x)| \leqslant \frac{A\Delta_n\left(\log\frac{1}{\Delta_n}\right)}{1+x^2}. \tag{5.21}$$

定理 5.6 给出了中心极限定理中余项 $F_n(x)-\Phi(x)$ 的非一致估计，它可以用来建立中心极限定理的整体形式.

定理 5.7　设 $\{X_n\}$ 满足定理 5.6 中的条件，如果 $\Delta_n \to 0$，那么对每个 $p > \frac{1}{2}$，

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_n(x) - \Phi(x)|^p \mathrm{d}x \to 0. \tag{5.22}$$

最后，作为定理 5.2 和 5.3 的推广和改进，我们可以证明

定理 5.8　设 $X_1,\cdots,X_n$ 是独立 r.v.，$EX_j = 0$，$E|X_j|^3 < \infty$，$j = 1,2,\cdots,n$. 记

$$\sigma_j^2 = \mathrm{Var}X_j,\ B_n = \sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2,\ F_n(x) = P\{B_n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n}X_j < x\},$$

$$L_n = B_n^{-3/2}\sum_{j=1}^{n}E|X_j|^3,$$

那么对所有 x，

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant AL_n/(1 + |x|)^3. \tag{5.23}$$

定理 5.9　设 $X_1,\cdots,X_n$ 是 i.i.d.r.v.，$EX_1 = 0$，$\mathrm{Var}X_1 = \sigma^2 > 0$，$E|X_1|^3 < \infty$. 那么对所有 x，

$$\left|P\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}X_j < x\right\} - \Phi(x)\right| < \frac{AE|X_1|^3}{\sqrt{n}\,\sigma^3(1 + |x|)^3}. \tag{5.24}$$

以上定理的证明可参见[19].

5.5　大偏差极限定理

设 $\{X_n\}$ 是 i.i.d.r.v. 列，$EX_1 = 0$，$EX_1^2 = \sigma^2$. 记 $S_n = \sum_{k=1}^{n}X_k$，$F_n(x) = P\{S_n/(\sqrt{n})\sigma < x\}$. 由定理 4.7 知

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|F_n(x) - \Phi(x)| \to 0 \quad (n\to\infty).$$

因此当 $|x| \leqslant c$ 时一致地有

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} \to 1, \qquad \frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)} \to 1. \tag{5.25}$$

现在我们进一步讨论当 x 和 n 都很大时(5.25)式成立的条件，也就是给出当 $x_n \to \infty(n\to\infty)$ 时概率 $P\{S_n > x_n\sqrt{n}\}$ 与 $P\{S_n < -x_n\sqrt{n}\}$ 的估计. 这类问题统称为大偏差概率理论.

作为 Berry-Esseen 不等式的直接结果，我们有

定理 5.10　如果 $E|X_1|^3 < \infty$，那么(5.25)式在 $0 \leqslant x \leqslant (1-\varepsilon)(\log n)^{1/2}$ 上成立，其中 $0 < \varepsilon < 1$.

证　令 $R_n(x) = F_n(x) - \Phi(x)$. Berry-Esseen 不等式表明，对所有 x，$|R_n(x)| \leqslant cn^{-1/2}$，其中 $c = A\sigma^{-3}E|X_1|^3$，A 为绝对正常数. 因此，并注意到如

下初等事实：

$$1-\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-x^2/2}\left[1+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right],\quad x\to\infty,\tag{5.26}$$

如果 b 足够大且 $x\geqslant b$，那么

$$\frac{|R_n(x)|}{1-\Phi(x)}\leqslant 2(2\pi)^{1/2}cxe^{x^2/2}n^{-1/2}.\tag{5.27}$$

当 $b\leqslant x<(1-\epsilon)(\log n)^{1/2}$ 时，(5.27) 式的右边趋于 $0(n\to\infty)$. 从而

$$\frac{1-F_n(x)}{1-\Phi(x)}=1-\frac{R_n(x)}{1-\Phi(x)}\to 1.$$

证毕.

定理 5.10 中 x 的变化范围相当窄，但高阶矩的存在并不能本质地扩大这一范围. 称 r.v. X_1 满足 Cramér 条件，如果存在 $H>0$ 使得当 $|t|<H$ 时，$Ee^{tX_1}<\infty$.

定理 5.11　如果 $x\geqslant 0$，$x=o(n^{1/2})$，并且 X_1 满足 Cramér 条件，那么

$$\frac{1-F_n(x)}{1-\Phi(x)}=\exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left[1+O\left(\frac{x+1}{\sqrt{n}}\right)\right],\tag{5.28}$$

$$\frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)}=\exp\left\{-\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left[1+O\left(\frac{x+1}{\sqrt{n}}\right)\right],\tag{5.29}$$

其中 $\lambda(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k$，$c_k$ 仅依赖于 X_1 的半不变量. 该级数对充分小的 $|t|$ 收敛，并称之为 Cramér 级数.

习　题

1. 下列分布是 i.d. 的吗？为什么？

(i) $P(\zeta=k)=a^k(1+a)^{-(k+1)}$，$a>0$，$k=0,1,2,\cdots$；

(ii) $p_0=P(\zeta=0)=(1+\alpha\lambda)^{-1/\alpha}$，$\alpha>0$，$\lambda>0$，

$$P(\zeta=k)=\left(\frac{\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^k\frac{(1+\alpha)\cdots(1+(k-1)\alpha)}{k!}p_0,k=1,2,\cdots;$$

(iii) 密度函数 $p(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

2. 设 f 是 c.f.，若存在一列趋于无穷的正整数列 $\{n_k\}$ 及 c.f. 列 $\{\varphi_k\}$ 使得 $f=(\varphi_k)^{n_k}$，那么 f 是 i.d. 的.

3. 试举例说明一个 i.d. c.f. 写成某有限个 c.f. 的乘积时，乘积中的 c.f. 不必都是 i.d. 的.

（提示：考察如下 r.v. 的 c.f.：$P(X=-1)=p(1-p)/(1+p)$，$P(X=k)=(1-p)(1+p^2)p^k/(1+p)$，$k=0,1,2,\cdots$，其中 $0<p<1$. 证明它不是 i.d. 的，而 $|f|^2$ 是 i.d. 的.）

4. 设 $\{X_n,n\geq 1\}$ 是 i.i.d. r.v. 列，X_1 的 d.f. 为 $G(x)$；又设 Y 是参数为 λ 的 Poisson r.v.，Y 与 $\{X_n\}$ 独立. 试计算 $\sum_{i=1}^{Y}X_i$ 的 c.f.，它是 i.d. 的吗？（提示：所求 c.f. 为 $\exp\left\{\lambda\int(e^{itu}-1)\mathrm{d}G(u)\right\}$.）

5. 试求下列 i.d.c.f. 的 Lévy-Khintchine 及 Kolmogorov 表示式：

(i) Γ 分布的 c.f. $f(t)=(1-it/\beta)^{-\alpha}$，$\alpha>0$，$\beta>0$；

(ii) Cauchy 分布的 c.f. $f(t)=e^{-\theta|t|}$，$\theta>0$；

(iii) 负二项分布的 c.f.

$f(t)=\{p[1-(1-p)e^{it}]^{-1}\}^r$，$0<p<1$，$r$ 是正整数；

(iv) Laplace 分布的 c.f. $f(t)=(1+t^2)^{-1}$.

6. 试证 $f(t)=(1-b)/(1-be^{it})$，$0<b<1$，是 i.d.c.f.（提示：利用 Lévy-Khintchine 表示式.）

7*. 设 X_1,X_2 是具有 i.d.c.f. 的独立 r.v.，若 X_1+X_2 服从正态分布（Poisson 分布），那么 X_1 和 X_2 也服从正态分布（Poisson 分布）.

8. 设 $\{X_{nk},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$ 是独立 r.v. 组列，试证

$$P\{\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|X_{nk}|\geqslant\varepsilon\}\to 0\quad\text{等价于}\quad\sum_{k=1}^{k_n}P\{|X_{nk}|\geqslant\varepsilon\}\to 0.$$

9. 设 $\{X_{nk}\}$ 是独立 r.v. 组列，证明：$\sum_{k=1}^{k_n}X_{nk}\xrightarrow{P}\gamma$ 且 $\{X_{nk}\}$ 是无穷小的充要条件是对每一 $\varepsilon>0$ 有

(i) $\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|\geqslant\varepsilon}\mathrm{d}F_{nk}(x)\to 0$；

(ii) $\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|x|<\varepsilon}x\,\mathrm{d}F_{nk}(x)\to\gamma$；

(iii) $\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\int_{|x|<\varepsilon}x^2\mathrm{d}F_{nk}(x)-\left(\int_{|x|<\varepsilon}x\,\mathrm{d}F_{nk}(x)\right)^2\right\}\to 0.$

10. 设 $\{X_{nk}\}$ 是具有有限方差的独立 r.v. 组列，$\sum_{k=1}^{k_n}E(X_{nk}-EX_{nk})^2=1$，$\{X_{nk}-EX_{nk}\}$ 是无穷小的，那么 $\sum_{k=1}^{k_n}(X_{nk}-EX_{nk})$ 依分布收敛于标准正态变量

的充要条件是$\sum_{k=1}^{k_n}(X_{nk}-EX_{nk})^2\xrightarrow{P}1$.

11. 试给出独立且无穷小的 r.v. 组列$\{X_{nk}\}$的和$\sum_{k=1}^{k_n}X_{nk}$的极限分布为 Poisson 分布的充要条件.

12. 令$\{X_n,n\geqslant1\}$是独立 r.v. 列,$\{a_n\}$是正数列,若S_n/a_n依分布收敛于某非退化分布,试证a_n收敛于一个有限值或者"差不多"单调地发散于$+\infty$(即存在单调增加趋向于$+\infty$的数列b_n使得$b_n\geqslant a_n$, $b_n/a_n\to1$).

13. 试证 L 类中非退化的 i.d.d.f. 是绝对连续的.

14. 如果稳定 d.f. $F(x)$ 的特征指数 $\alpha<2$, 试证对任何 $p<\alpha$, $\int_{-\infty}^{\infty}|x|^p\mathrm{d}F(x)<\infty$.

15. 若 d.f. $V(x)$ 属于特征指数 $\alpha\leqslant2$ 的稳定分布的吸引域,试证对任何 $p<\alpha$, $\int_{-\infty}^{\infty}|x|^p\mathrm{d}F(x)<\infty$.

16. 求证:当 $n\to\infty$ 时

$$\mathrm{e}^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\to\frac{1}{2}.$$

(提示:利用中心极限定理.)

17. 设独立 r.v. 列$\{X_n\}$有分布:对某 $\alpha>1$,

$$P(X_n=n)=P(X_n=-n)=\frac{1}{6n^{2(\alpha-1)}},\ P(X_n=0)=1-\frac{1}{3n^{2(\alpha-1)}},$$

试证当且仅当 $\alpha<3/2$ 时,Lindeberg 条件被满足.

18. 设$\{X_{nk}\}$是独立 r.v. 组列,$EX_{nk}=0$, $EX_{nk}^2=\sigma_{nk}^2<\infty$,$b_n^2=\sum_{k=1}^{k_n}\sigma_{nk}^2\to\infty$. 记$S_n=\sum_{k=1}^{k_n}X_{nk}$. 若对任给的 $\varepsilon>0$,

$$\sum_{k=1}^{k_n}EX_{nk}^2I(|X_{nk}|>\varepsilon b_n)=o(b_n^2),$$

则 $S_n/b_n\xrightarrow{d}N(0,1)$.

19. 设$\{Y_n;n\geqslant1\}$是方差为1的i.i.d.r.v. 列,$\{\sigma_n^2;n\geqslant1\}$是非零常数列,$b_n^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\to\infty$, 若 $\sigma_n=o(b_n)$ 且 $EY_1=0$,那么加权 i.i.d.r.v. 列$\{\sigma_nY_n;n\geqslant1\}$服从中心极限定理,即$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_kY_k\xrightarrow{d}N(0,1)$.

20. 设$\{X_n\}$是独立 r.v. 列,$P\{X_n=2^n\}=P\{X_n=-2^n\}=2^{-(n+1)}$,

$P\{X_n = 1\} = P\{X_n = -1\} = \frac{1}{2}(1 - 2^{-n})$. 证明$\{X_n\}$不满足 Lindeberg 条件,但服从中心极限定理.

21. 设$\{X_n, n \geq 1\}$是 i.i.d. r.v. 列,存在常数A_n和B_n使

$$Z_n = \frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n} X_k - A_n$$

依分布收敛于指数为$\alpha(0 < \alpha < 2)$的稳定分布. 试证B_n必有形式$B_n = n^{1/\alpha}L(n)$,其中$L(n)$是缓变函数($[0,\infty)$上的正值函数$L(x)$称为缓变的,若对一切$c > 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} L(cx)/L(x) = 1$).

22. 定义在$[0,\infty)$上的正值函数$l(x)$说是具有指数α正则变化的,若对一切$c > 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} l(cx)/l(x) = c^{\alpha}$. 试证:

(i) $L(x) = l(x)/x^{\alpha}$是缓变函数;

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x L(u)\mathrm{d}u = \infty$;

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^1 [L(cx)/L(x)]\mathrm{d}c = \int_0^1 \lim\limits_{x\to\infty}[L(cx)/L(x)]\mathrm{d}c = 1$;

(iv) 若$L(x)$在任一有限区间上可积,那么它有表示:

$$L(x) = b(x)\exp\left\{\int_{\beta}^{x}[a(u)/u]\mathrm{d}u\right\},$$

其中$\lim\limits_{x\to\infty} b(x) = b \neq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} a(x) = 1$, $\beta > 0$.

23. 设函数$L(x)$有22(iv)中表示,试证此时有

(i) 对任何$c > 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} L(x + c)/L(x) = 1$;

(ii) 对一切$\delta > 0$有

$$\lim_{x\to\infty} x^{\delta}L(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} x^{-\delta}L(x) = 0;$$

(iii) $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{2^k \leq c < 2^{k+1}} L(c)/L(2^k) = 1$.

24. 设$F(x)$和$G(x)$是取整数值 r.v. 的 d.f.,其相应的 c.f. 分别为$f(t)$和$g(t)$,试证

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leq \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(t) - g(t)}{t}\right|\mathrm{d}t.$$

25. 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是独立 r.v.,均值为0,方差有限. 记$V_j(x) = P(X_j < x)$, $\sigma_j^2 = \mathrm{Var}X_j$, $B_n^2 = \sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_j^2$,

$$F_n(x) = P\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{j=1}^{n} X_j < x\right\}, \quad \Delta_n(x) = |F_n(x) - \Phi(x)|,$$

那么

$$\sup_x \Delta_n(x) < CB_n^{-3}\left\{\left|\sum_{j=1}^n \int_{|x|\leqslant B_n} x^3 \mathrm{d}V_j(x)\right| + \sup_{0<z\leqslant B_n} z \sum_{j=1}^n \int_{|x|>z} x^2 \mathrm{d}V_j(x)\right\}.$$

26. 设$\{X_n\}$是i.i.d.r.v.列，$EX_1=0$，$\mathrm{Var}X_1=1$.记

$$F_n(x)=P\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^n X_j < x\right\},\quad \Delta_n=\sup_x |F_n(x)-\Phi(x)|.$$

试证级数$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\Delta_n$收敛当且仅当$EX_1^2\log(1+|X_1|)<\infty$.又对$0<\delta<1$，$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1+\delta/2}\Delta_n$收敛等价于$E|X_1|^{2+\delta}<\infty$.

27. 设$\{X_n\}$是i.i.d.r.v.列，$EX_1=0$，$EX_1^2=1$，记

$$\sigma_n^2=\int_{|x|<\sqrt{n}} x^2 \mathrm{d}F(x)-\left(\int_{|x|<\sqrt{n}} x\mathrm{d}F(x)\right)^2,$$

其中$F(x)$为X_1的d.f.试证

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sup_x\left|P\left\{\frac{1}{\sigma_n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n X_k<x\right\}-\Phi(x)\right|<\infty.$$

28. 设$\{X_n\}$是独立r.v.列，$EX_n=0$，$EX_n^2=\sigma_n^2$，$B_n^2=\sum_{k=1}^n \sigma_k^2$，对某$0<\delta\leqslant 1$，$E|X_n|^{2+\delta}<\infty$，那么对任意$x$有

$$\left|P\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^n X_k<x\right\}-\Phi(x)\right|\leqslant \frac{A}{B_n^{2+\delta}(1+|x|)^{2+\delta}}\sum_{k=1}^n E|X_k|^{2+\delta}.$$

29. 证明：正态分布尾概率估计：对$x>0$有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{e}^{-x^2/2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2},$$

进一步还有如下的下限：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{e}^{-x^2/2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t.$$

30. 关于U统计量的中心极限定理：设$\{X_n;n\geqslant 1\}$是i.i.d.r.v.列，$\varphi(x_1,\cdots,x_m)$是m元对称函数.若$E\varphi^2(X_1,\cdots,X_m)<\infty$且$E\varphi(X_1,\cdots,X_m)=\theta$，试证

$$\sqrt{n}(U_n-\theta)\xrightarrow{d} N(0,\sigma^2),$$

其中$U_n=\binom{n}{m}^{-1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}\varphi(X_{i_1},\cdots,X_{i_m})$，$\sigma^2=m^2E(E^2\{\varphi(X_1,\cdots,X_m)|X_1\}-\theta^2)$.(提示：记$h(x)=E(\varphi(X_1,\cdots,X_m)|X_1=x)-\theta$，对

$$V_n=mn^{-1/2}\sum_{k=1}^n h(X_k)$$

应用中心极限定理，并验证$U_n-V_n\xrightarrow{P}0$.)

第三章　大数定律和重对数律

本章讨论r.v.序列和的依概率收敛性和a.s.收敛性.作为独立r.v.组列的组内和的分布弱收敛于无穷可分分布的特例,在§1中给出独立r.v.组列服从大数定律的若干类充要条件.作为这些结果的特殊情形,可得到独立r.v.序列服从弱大数定律的几组充要条件.在§2中,引入三个概率论极限理论中的重要工具:Kolmogorov不等式,Levy不等式和Borel Cantelli引理;讨论独立r.v.的级数a.s.收敛的条件,证明独立r.v.序列和的a.s.收敛性、依概率收敛性和依分布收敛性之间是等价的.在§3中,给出著名的Kolmogorov强大数定律及其推广,Marcinkiewicz强大数定律,若干独立但不必同分布的r.v.序列的强大数定律也在此节讨论.§4介绍独立r.v.序列完全收敛性的等价条件.§5讨论重对数律,它是强大数定律的精确化,该节只给出两个经典的定理,进一步的结果可参看第五章.

§1　弱大数定律

定义1.1　称r.v.组列$\{X_{nk};k=1,\cdots,k_n,n=1,2,\cdots\}$服从**弱大数定律**,如果存在常数列$\{b_n\}$,使得

$$\sum_k X_{nk}-b_n\xrightarrow{P}0. \tag{1.1}$$

换言之,$\{X_{nk}\}$服从弱大数定律,当且仅当存在常数列$\{b_n\}$,使得$\sum_k X_{nk}-b_n$的分布弱收敛于退化分布

$$D(x)=\begin{cases}0, & 若\ x<0,\\ 1, & 若\ x\geq 0.\end{cases}$$

首先我们指出:假若$\{X_{nk}\}$服从弱大数定律,那么其中的常数b_n可以取作$m\left(\sum_k X_{nk}\right)+o(1)$.事实上,对任给的$\varepsilon>0$和所有充分大的$n$,

$$P\left\{\left|\sum_k X_{nk}-b_n\right|<\varepsilon\right\}>\frac{1}{2},$$

由中位数的性质可知,这时成立着$\left|m\left(\sum_k X_{nk}\right)-b_n\right|<\varepsilon$.

作为第二章中给出的独立r.v.组列的组内和的分布弱收敛于无穷可分

分布的特例(也可作为向退化正态分布收敛的特例)，可以得到$\{X_{nk}\}$服从弱大数定律的条件.

定理 1.1　独立 r.v. 组列$\{X_{nk}\}$服从弱大数定律的充要条件是对任给的$\varepsilon>0$,

$$\sum_k P\{|X_{nk}-m_{nk}|\geqslant\varepsilon\}\to 0, \tag{1.2}$$

$$\sum_k \mathrm{Var}\{(X_{nk}-m_{nk})I(|X_{nk}-m_{nk}|<1)\}\to 0, \tag{1.3}$$

其中m_{nk}是 r.v. X_{nk}的中位数.

证　由第二章的定理 2.4，我们只需证明：若$\{X_{nk}\}$服从弱大数定律，那么$\{X_{nk}-m_{nk}\}$满足无穷小条件. 以f_{nk}记X_{nk}的 c.f.，注意到分布$D(x)$的 c.f. 恒等于 1，此时对每一t,

$$e^{-ib_n t}\prod_k f_{nk}(t)\to 1.$$

所以$\prod_k|f_{nk}(t)|\to 1$，进而$\min_k|f_{nk}(t)|^2\to 1$. 函数$|f_{nk}(t)|^2$可以看作两个独立同分布的 r.v. X_{nk}和Y_{nk}的差的 c.f.，因此对每一$\varepsilon>0$,

$$\max_k P\{|X_{nk}-Y_{nk}|\geqslant\varepsilon\}\to 0. \tag{1.4}$$

但是有

$$\begin{aligned}P\{X_{nk}-Y_{nk}\geqslant\varepsilon\}&\geqslant P\{X_{nk}-m_{nk}\geqslant\varepsilon, Y_{nk}-m_{nk}\leqslant 0\}\\&\geqslant\frac{1}{2}P\{X_{nk}-m_{nk}\geqslant\varepsilon\}.\end{aligned}$$

类似地

$$P\{X_{nk}-Y_{nk}<-\varepsilon\}\geqslant\frac{1}{2}P\{X_{nk}-m_{nk}<-\varepsilon\}.$$

由(1.4)，对k一致地有

$$P\{|X_{nk}-m_{nk}|\geqslant\varepsilon\}\leqslant 2P\{|X_{nk}-Y_{nk}|\geqslant\varepsilon\}\to 0,$$

这就是说，$\{X_{nk}-m_{nk}\}$满足无穷小条件. 证毕.

推论 1.1　独立 r.v. 组列$\{X_{nk}\}$服从弱大数定律的充要条件是

$$\sum_k P\{|X_{nk}-m_{nk}|\geqslant 1\}\to 0, \tag{1.5}$$

$$\sum_k E\{(X_{nk}-m_{nk})I(|X_{nk}-m_{nk}|<1)\}^2\to 0, \tag{1.6}$$

这时可取(1.1)中的

$$b_n=\sum_k\{m_{nk}+E((X_{nk}-m_{nk})I(|X_{nk}-m_{nk}|<\tau))\}+o(1), \tag{1.7}$$

其中τ是任意正数.

证　条件必要　由定理 1.1，条件(1.2) 和(1.3) 满足. 这时(1.5) 显然成立. 我们来证明(1.6) 式也成立.

记 $Y_{nk}=X_{nk}-m_{nk}$，以 A 记区间 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 之一，在其上 $|E\{Y_{nk}I(Y_{nk}\in A)\}|$ 取较大的绝对值(A 可以依赖于 n 和 k). 我们有

$$
\begin{aligned}
\sum_k\{E(Y_{nk}I(|Y_{nk}|<1))\}^2 &\leqslant 4\sum_k\{E(Y_{nk}I(Y_{nk}\in A))\}^2\\
&\leqslant 4\sum_k E\{Y_{nk}I(Y_{nk}\in A)\}^2 EI(Y_{nk}\in A)\\
&\leqslant 4\sum_k E\{Y_{nk}I(|Y_{nk}|<1)\}^2 P\{Y_{nk}\in A\}\\
&\leqslant \frac{1}{2}\sum_k E\{Y_{nk}I(|Y_{nk}|<1)\}^2\\
&\leqslant \sum_k\{E[Y_{nk}I(|Y_{nk}|<1)]^2-[E(Y_{nk}I(|Y_{nk}|<1))]^2\}.
\end{aligned}
$$

由(1.3) 即可推得(1.6).

条件充分　假设(1.5) 和(1.6) 满足，这时(1.3) 显然成立. 如果 $\varepsilon\geqslant 1$，显然(1.2) 也成立. 如果 $0<\varepsilon<1$，从(1.5) 和(1.6) 可得

$$
\begin{aligned}
\sum_k P\{|Y_{nk}|\geqslant\varepsilon\} &= \sum_k P\{\varepsilon\leqslant|Y_{nk}|<1\}+\sum_k P\{|Y_{nk}|\geqslant 1\}\\
&\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_k E\{Y_{nk}I(\varepsilon\leqslant|Y_{nk}|<1)\}^2+\sum_k P\{|Y_{nk}|\geqslant 1\}\to 0.
\end{aligned}
$$

至于 b_n 的取法，可以从第一章定理 2.3 的注看出.

由推论 1.1，我们还可以将弱大数定律的充要条件改写成另一形式.

推论 1.2　独立 r.v. 组列服从弱大数定律的充要条件是

$$
\sum_k E\frac{(X_{nk}-m_{nk})^2}{1+(X_{nk}-m_{nk})^2}\to 0.
$$

证　推论的结论可由推论 1.1 及下列一般的不等式得到：设 X 是 r.v.，b 是正常数，记 $Z=XI(|X|<b)$，则

$$
\frac{EZ^2}{2b^2}+\frac{1}{2}P\{|X|\geqslant b\}\leqslant E\frac{X^2}{X^2+b^2}\leqslant\frac{EZ^2}{b^2}+P\{|X|\geqslant b\}.
$$

事实上

$$
\begin{aligned}
E\frac{X^2}{X^2+b^2} &= E\left\{\frac{X^2}{X^2+b^2}I(|X|<b)\right\}+E\left\{\frac{X^2}{X^2+b^2}I(|X|\geqslant b)\right\}\\
&\leqslant\frac{1}{b^2}E\{X^2I(|X|<b)\}+EI(|X|\geqslant b)\\
&=\frac{1}{b^2}EZ^2+P(|X|\geqslant b).
\end{aligned}
$$

另一方面

$$E\frac{X^2}{X^2+b^2}\geqslant\frac{1}{2b^2}E\{X^2I(|X|<b)\}+\frac{1}{2}EI(|X|\geqslant b)$$

$$=\frac{1}{2b^2}EZ^2+\frac{1}{2}P(|X|\geqslant b).$$

推论 1.3 独立 r.v. 组列$\{X_{nk}\}$满足无穷小条件且

$$\sum_k X_{nk}\xrightarrow{P}0$$

的充要条件是对任给的$\varepsilon>0$和某个$\tau>0$

$$\sum_k P\{|X_{nk}|\geqslant\varepsilon\}\to0, \tag{1.8}$$

$$\sum_k E\{X_{nk}I(|X_{nk}|<\tau)\}\to0, \tag{1.9}$$

$$\sum_k \mathrm{Var}\{X_{nk}I(|X_{nk}|<\tau)\}\to0. \tag{1.10}$$

我们可把"对任给$\varepsilon>0$和某个$\tau>0$"换作"对任给的$\varepsilon>0$和任给的$\tau>0$".

证 这时我们总有$\max\limits_k |m_{nk}|\to0$. 为证明我们的结论,只需比较本推论与定理 1.1 和推论 1.1. 对于推论 1.1 的(1.6),(1.7)中出现的示性函数与本推论(1.9)和(1.10)中出现的示性函数之间的关系,可以完全类似于第二章的定理 4.1 注中的讨论得出,从略. 此外,从条件(1.8)易知$m(\sum\limits_k X_{nk})\to0$和$\sum\limits_k m_{nk}\to0$.

现在我们来考察 r.v. 序列$\{X_n;n\geqslant1\}$.

定义 1.2 称 r.v. 序列$\{Y_n;n\geqslant1\}$**是弱稳定的**,如果存在常数序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$,$0<a_n\uparrow\infty$,使得

$$\frac{1}{a_n}Y_n-b_n\xrightarrow{P}0. \tag{1.11}$$

定义 1.3 称 r.v. 序列$\{X_n;n\geqslant1\}$服从弱大数定律,如果$\{S_n\}$是弱稳定的,这里$S_n=\sum\limits_{k=1}^n X_k$.

若记$X_{nk}=\frac{X_k}{a_n}$,引入组列$\{X_{nk};k=1,\cdots,n,n=1,2,\cdots\}$,作为上面给出的各类 r.v. 组列的弱大数定律的特例,我们可以得到一系列 r.v. 序列的弱大数定律. 记$m_k=mX_k$,则有$mX_{nk}=m_k/a_n$.

推论 1.2 的特例是

推论 1.4 独立 r.v. 序列$\{X_n\}$服从弱大数定律的充要条件是

$$\sum_{k=1}^{n} E\frac{(X_k - m_k)^2}{a_n^2 + (X_k - m_k)^2} \to 0, \tag{1.12}$$

这时

$$b_n = \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\{m_k + E[(X_k - m_k)I(|X_k - m_k| < \tau a_n)]\} + o(1),$$

其中 τ 是任意的正常数，

相应于推论 1.3，我们有下述结果.

推论 1.5　对独立 r.v. 序列 $\{X_n\}$，存在常数列 $\{a_n\}$，$0 < a_n \uparrow \infty$，

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} 0 \tag{1.13}$$

的充要条件是

$$\sum_{k=1}^{n} P\{|X_k| \geq a_n\} \to 0, \tag{1.14}$$

$$\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\{X_k I(|X_k| < a_n)\} \to 0, \tag{1.15}$$

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} E\{X_k I(|X_k| < a_n)\} \to 0. \tag{1.16}$$

注　如取 $b_n = \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} E\{X_k I(|X_k| < a_n)\} + o(1)$，则由(1.14)，(1.15)可以推得 $\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} X_k - b_n \xrightarrow{P} 0$.

证　条件充分　由(1.15)，对任给的 $\delta > 0$，

$$P\left\{\left|\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} X_k I(|X_k| < a_n) - \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} E[X_k I(|X_k| < a_n)]\right| \geq \delta\right\}$$

$$< \frac{1}{\delta^2 a_n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\{X_k I(|X_k| < a_n)\} \to 0,$$

因此

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} X_k I(|X_k| < a_n) - \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} E[X_k I(|X_k| < a_n)] \xrightarrow{P} 0.$$

由(1.16)得

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} X_k I(|X_k| < a_n) \xrightarrow{P} 0. \tag{1.17}$$

此外，由(1.14)有

$$P\left\{\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} X_k I(|X_k| \geq a_n) > \varepsilon\right\} \leq \sum_{k=1}^{n} P\{|X_k| \geq a_n\} \to 0,$$

因此

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} X_k I(|X_k| \geqslant a_n) \xrightarrow{P} 0. \tag{1.18}$$

结合(1.17)和(1.18),得证(1.13).

条件必要　由推论1.3,我们只须证明 $X_{nk}=X_k/a_n$ 满足无穷小条件就够了.

记 $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$,设 ε 和 δ 是任意正数. 由(1.13),存在 $N=N(\varepsilon,\delta)$,当 $n \geqslant N$ 时,

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{a_n}\right| < \varepsilon\right\} > 1-\delta.$$

对一切 $k < N$,存在 $N'=N'(\varepsilon,\delta)$,使得 $n > N'$ 时

$$P\left\{\frac{|X_k|}{a_n} < \varepsilon\right\} > 1-\delta. \tag{1.19}$$

而当 $n \geqslant N$ 时,对任意的 $n \geqslant k$,

$$\begin{aligned} P\left\{\frac{|X_k|}{a_n} < 2\varepsilon\right\} &\geqslant P\left\{\frac{|X_k|}{a_k} < 2\varepsilon\right\} \\ &= P\left\{\left|\frac{S_k}{a_k} - \frac{S_{k-1}}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_k}\right| < 2\varepsilon\right\} \\ &\geqslant P\left\{\left|\frac{S_k}{a_k}\right| < \varepsilon, \left|\frac{S_{k-1}}{a_{k-1}}\right| < \varepsilon\right\}. \end{aligned}$$

利用事实

$$P(A \cap B) \geqslant P(A) + P(B) - 1,$$

其中 A 和 B 是任意事件,我们得

$$P\left\{\frac{|X_k|}{a_n} < 2\varepsilon\right\} \geqslant 1-2\delta. \tag{1.20}$$

结合(1.19)和(1.20)得证无穷小条件被满足. 证毕.

推论 1.6　如果 $\{X_n\}$ 是 i.i.d.r.v. 序列,那么存在常数序列 $\{b_n\}$ 使

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - b_n \xrightarrow{P} 0 \tag{1.21}$$

的充要条件是

$$nP(|X_1| \geqslant n) \to 0, \tag{1.22}$$

此时 $b_n = E\{X_1 I(|X_1| < n)\} + o(1)$. 特别地,如果附加条件

$$E\{X_1 I(|X_1| < n)\} \to 0, \tag{1.23}$$

(1.21)中的 b_n 可以取作 0.

证　条件充分　记 $H(x)=P\{|X_1|>x\}$. 由(1.22)知 $\lim_{x\to\infty} xH(x)=0$.

记 X_1 的 d.f. 为 $F(x)$，则

$$\frac{1}{n}\int_{|x|\leqslant n} x^2 \mathrm{d}F(x) = \frac{1}{n}\int_0^n x^2 \mathrm{d}H(x)$$

$$= -\frac{1}{n}n^2H(n) + \frac{2}{n}\int_0^n xH(x)\mathrm{d}x = o(1),$$

由此即得对 $a_n = n$，(1.15) 成立. 由推论 1.5 的注得证(1.21) 成立.

条件必要　易知对 $X_{nk} = \frac{1}{n}X_k$ 的中位数 $m_{nk} = \frac{1}{n}m_k$ 关于 $k \leqslant n$ 一致地成立 $m_{nk} \to 0$. 因此存在正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时

$$nP(|X_1| \geqslant n) = \sum_{k=1}^n P(|X_{nk}| \geqslant 1)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^n P\left\{|X_{nk} - m_{nk}| \geqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

由(1.21)，应用定理 1.1 可知上式右端的极限为 0，这就是说条件(1.22) 被满足. 从这一条件出发，不难看到，应取 $b_n = E\{X_1I(|X_1| < n)\} + o(1)$. 证毕.

由这一推论，并注意到

$$nP(|X_1| \geqslant n) < E\{|X_1|I(|X_1| \geqslant n)\},$$

又可得

推论 1.7　如果 $\{X_n\}$ 是 i.i.d.r.v. 序列，且 EX_1 存在，则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{P} EX_1. \tag{1.24}$$

定理1.2　设 $\{X_n\}$ 是 i.i.d.r.v. 序列，记 X_1 的 c.f. 为 $f(t)$，那么对 $\alpha > 1/2$ 下列命题等价：

(i) 存在 b_n，使得

$$\frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^n X_k - b_n \xrightarrow{P} 0; \tag{1.25}$$

(ii) $|\log|f(t)||^\alpha$ 在 $t = 0$ 处可微；

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} nP\{|X_1| > n^\alpha\} = 0.$ $\qquad (1.26)$

证　与推论 1.6 一样可证当 $\alpha > 1/2$ 时(i) 与(iii) 等价. 显然(ii) 成立当且仅当 $f(t)$ 换成 $|f(t)|^2$ 时(ii) 成立. 而(i) 成立当且仅当对应于相应的对称化 r.v. (i) 成立. 事实上，利用不等式

$$\frac{1}{2}P\{|X - mX| \geqslant \varepsilon\} \leqslant P\{|X - Y| \geqslant \varepsilon\}$$

$$\leqslant 2P\left\{|X - a| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

其中 X、Y 是独立同分布 r.v.，a 是任给实数. 如记 S_n 的对称化 r.v. 为 $\tilde{S}_n$，则有

$$\frac{1}{2}P\left\{\left|\frac{S_n}{n^\alpha}-\frac{mS_n}{n^\alpha}\right|\geq\epsilon\right\}\leq P\left\{\left|\frac{\tilde{S}_n}{n^\alpha}\right|\geq\epsilon\right\}\leq 2P\left\{\left|\frac{S_n}{n^\alpha}-b_n\right|\geq\epsilon/2\right\}.$$

因此可设 X_1 是对称的，$f(t)$ 是实的. 此时可取 $b_n=0$.

容易知道 $S_n/n^\alpha\xrightarrow{P}0$ 当且仅当对任一 t，

$$\left|f\left(\frac{t}{n^\alpha}\right)\right|^n\to 1.$$

后者等价于

$$\left|\log f\left(\frac{t}{n^\alpha}\right)\right|^\alpha\Big/\frac{t}{n^\alpha}\to 0\qquad(t\neq 0);$$

而它又等价于 $|\log f(t)|^\alpha$ 在 $t=0$ 处可微. 这后一等价性利用了在有界区间中上述收敛是一致地成立的.

特别地，我们可以写出

推论 1.8 i.i.d. r.v. 序列 $\{X_n\}$ 服从大数定律：

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-b_n\xrightarrow{P}0$$

的充要条件是对 X 的 c.f. $f(t)$，在 $t=0$ 处 $|f(t)|$ 是可微的.

§2 独立随机变量和的收敛性

2.1 独立 r.v. 和的 a.s. 收敛的条件

本段讨论独立 r.v. 和 a.s. 收敛的条件，为此先证明一个概率论中的重要不等式.

引理 2.1(Kolmogorov 不等式) 设 $\{X_k;1\leq k\leq n\}$ 是独立 r.v.，$EX_k=0$，$EX_k^2<\infty$，记 $S_k=\sum_{j=1}^{k}X_j$，那么对任给的 $\varepsilon>0$，

$$P\left\{\max_{1\leq k\leq n}|S_k|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n}EX_k^2. \tag{2.1}$$

如果进一步假设 $|X_k|\leq c<\infty$ $(1\leq k\leq n)$，又有

$$P\left\{\max_{1\leq k\leq n}|S_k|\geq\varepsilon\right\}\geq 1-(\varepsilon+c)^2\Big/\sum_{k=1}^{n}EX_k^2. \tag{2.2}$$

证 记事件 $A_0=\Omega$，$A_k=\{\max_{1\leq j\leq k}|S_j|<\varepsilon\}$，$k=1,\cdots,n$，$B_1=\{|S_1|\geq\varepsilon\}$，$B_k=A_{k-1}-A_k=\{|S_j|<\varepsilon,1\leq j\leq k-1;|S_k|\geq\varepsilon\}$，$k=$

$2,\cdots,n$. 则因 $B_k\in\sigma(X_1,\cdots,X_k)$，所以 $S_kI_{B_k}$ 与 S_n-S_k 独立. 由此我们有

$$\begin{aligned}ES_n^2I_{B_k} &= ES_k^2I_{B_k} + E(S_n-S_k)^2I_{B_k}\\ &\geqslant ES_k^2I_{B_k} \geqslant \varepsilon^2P(B_k).\end{aligned}\tag{2.3}$$

注意到 $A_n^c=\bigcup\limits_{k=1}^{n}B_k$，由上式即得

$$ES_n^2I_{A_n^c}\geqslant \varepsilon^2P(A_n^c).$$

故

$$\sum_{k=1}^{n}EX_k^2 = ES_n^2 \geqslant ES_n^2I_{A_n^c} \geqslant \varepsilon^2P(A_n^c).$$

从而得证(2.1).

对于(2.2)，当 $c=\infty$ 时显然成立，故可设 $c<\infty$，因为在 B_k 上，$|S_k|\leqslant|S_{k-1}|+|X_k|\leqslant\varepsilon+c$，从(2.3)中的第一个等式，

$$\begin{aligned}ES_n^2I_{A_n^c} &= \sum_{k=1}^{n}ES_k^2I_{B_k} + \sum_{k=1}^{n}E(S_n-S_k)^2I_{B_k}\\ &\leqslant (\varepsilon+c)^2\sum_{k=1}^{n}P(B_k) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n}EX_j^2P(B_k)\\ &\leqslant \Big[(\varepsilon+c)^2 + \sum_{k=1}^{n}EX_k^2\Big]P(A_n^c).\end{aligned}\tag{2.4}$$

另一方面又有

$$\begin{aligned}ES_n^2I_{A_n^c} &= ES_n^2 - ES_n^2I_{A_n} \geqslant \sum_{k=1}^{n}EX_k^2 - \varepsilon^2P(A_n)\\ &= \sum_{k=1}^{n}EX_k^2 - \varepsilon^2 + \varepsilon^2P(A_n^c),\end{aligned}\tag{2.5}$$

结合(2.4)和(2.5)，得证

$$P(A_n^c)\geqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}EX_k^2-\varepsilon^2}{(\varepsilon+c)^2+\sum\limits_{k=1}^{n}EX_k^2-\varepsilon^2}\geqslant 1-\frac{(\varepsilon+c)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}EX_k^2}.$$

下列引理在讨论 r.v. 序列的 a.s. 收敛性时具有特殊的重要性，是经常被引用的. 我们先引入一些记号，事件序列 $\{A_n\}$ 的**上极限** $\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$ 和**下极限** $\liminf\limits_{n\to\infty}A_n$ 分别定义作

$$\limsup_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,\qquad \liminf_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.$$

因此 $\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$ 是属于无穷多个 A_n 的点的集合，我们常把它记作 $\{A_n,\text{i.o.}\}$；$\liminf\limits_{n\to\infty}A_n$ 是除去 $\{A_n\}$ 中有限多个外，属于其余所有的 A_n 的点的集合. 显然

$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$. 如果这两个集合相等，我们把它们记作$\lim_{n\to\infty} A_n$. 并称它是集合序列$\{A_n\}$的极限.

引理 2.2(Borel Cantelli 引理)

(i) 若$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$，则$P\{A_n, \text{i.o.}\} = 0$.

(ii) 若$\{A_n\}$相互独立，$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$，则$P\{A_n, \text{i.o.}\} = 1$.

证 (i) $0 \leqslant P\{A_n, \text{i.o.}\} = P\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right\}$

$$\leqslant P\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right\} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

(ii) 如果$\{A_n\}$独立，则对任意的正整数$n < N$，

$$1 - P\left\{\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right\} = P\left\{\bigcap_{k=n}^{N} A_k^c\right\} = \prod_{k=n}^{N} P(A_k^c)$$

$$= \prod_{k=n}^{N} \{1 - P(A_k)\} \leqslant \prod_{k=n}^{N} e^{-P(A_k)}$$

$$= \exp\left\{-\sum_{k=n}^{N} P(A_k)\right\} \to 0 \qquad (N \to \infty).$$

因此对每一n，$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1$. 故

$$P\{A_n, \text{i.o.}\} = 1.$$

证毕.

我们称独立 r.v. 的级数$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$是 a.s. 收敛的，若独立 r.v. 的和$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ a.s. 收敛. 先来给出级数 a.s. 收敛的一个充分条件.

定理 2.1 设$\{X_n\}$是均值为零的独立 r.v. 序列，满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} EX_n^2 < \infty, \tag{2.6}$$

那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s. 收敛.

证 记$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. 易知对任给的$\varepsilon > 0$，当正整数$m \geqslant n \to \infty$时，

$$P\{|S_m - S_n| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=n+1}^{m} EX_k^2 \to 0.$$

因此$\{S_n\}$是依概率基本序列，故存在r.v. S，使得$S_n \xrightarrow{P} S$（见第一章注5.2）。进而存在子序列$\{S_{n_k}\}$，使

$$S_{n_k} \to S \quad \text{a.s.} \tag{2.7}$$

又由Kolmogorov不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{\max_{n_k < j \leqslant n_{k+1}} |S_j - S_{n_k}| \geqslant \varepsilon\}$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} EX_j^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{\infty} EX_j^2 < \infty,$$

因此由Borel-Cantelli引理，当$k \to \infty$时

$$\max_{n_k < j \leqslant n_{k+1}} |S_j - S_{n_k}| \to 0 \quad \text{a.s.} \tag{2.8}$$

结合(2.7)和(2.8)即得

$$S_n \to S \qquad \text{a.s.}$$

注 本定理的证明方法很有用，常称此方法为**子序列方法**.

下列定理是关于一致有界的r.v.和的a.s.收敛性的.

定理 2.2 设$\{X_n\}$是独立r.v.序列，对一切n，$|X_n| \leqslant c < \infty$ a.s.

(i) 若$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s.收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} EX_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var} X_n$都收敛.

(ii) 若$EX_n = 0\ (n \geqslant 1)$且$\sum_{n=1}^{\infty} EX_n^2 = \infty$，则$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s.发散.

证 先证(ii). 若对一切n，$|X_n| \leqslant c < \infty$，$EX_n = 0$，且$\sum_{n=1}^{\infty} EX_n^2 = \infty$，则由引理2.1的(2.2)式，

$$P\left\{\max_{1 \leqslant k \leqslant m} |X_{n+1} + \cdots + X_{n+k}| \geqslant \varepsilon\right\}$$

$$\geqslant 1 - \frac{(\varepsilon + c)^2}{\sum_{k=n+1}^{n+m} EX_k^2} \to 1\ (m \to \infty).$$

故对任意的正整数n，

$$P\left\{\sup_{k \geqslant 1} |X_{n+1} + \cdots + X_{n+k}| \geqslant \varepsilon\right\} = 1,$$

因此$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s.发散.

再证(i). 作r.v.序列$\{X_n'\}$，使$X_n, X_n', n = 1,2,\cdots$，相互独立，且$X_n$与$X_n'$有相同分布. 记$X_n'' = X_n - X_n'$，则$\{X_n''\}$是独立r.v.序列，$|X_n''| \leqslant 2c$，$EX_n'' = 0$，$\mathrm{Var} X_n'' = 2\mathrm{Var} X_n$.

因$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s. 收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty} X_n'$ 也a.s. 收敛. 因此$\sum_{n=1}^{\infty} X_n''$ a.s. 收敛. 由已证的(ii)，必有$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var} X_n'' < \infty$，故$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var} X_n < \infty$. 由定理 2.1，$\sum_n (X_n - EX_n)$ a.s. 收敛，从而$\sum_n EX_n$ 收敛. 证毕.

对任意的 r.v. X，记 $X^c = XI(|X| \leqslant c)$.

定理 2.3(三级数定理) 设$\{X_n\}$是独立 r.v. 序列，那么使得级数$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s. 收敛的必要条件是对每一 $c \in (0,\infty)$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > c) < \infty$；

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} EX_n^c$ 收敛；

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var} X_n^c < \infty$.

充分条件是对某一 $c \in (0, +\infty)$，上述三级数收敛.

证 条件必要 若$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s. 收敛，则 $X_n \to 0$ a.s. 因此对任一 $c > 0$，若记 $A_n = \{|X_n| \geqslant c\}$，有 $P\{A_n, \text{i.o.}\} = 0$. 由 Borel-Cantelli 引理得知条件(i) 满足. 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq X_n^c) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geqslant c) < \infty,$$

即 $P(\{X_n \neq X_n^c\}, \text{i.o.}) = 0$. 所以从$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s. 收敛可知$\sum_{n=1}^{\infty} X_n^c$ 也 a.s. 收敛. 再由定理 2.2(i)，得证条件(ii) 和(iii).

条件充分 由条件(i)，$P(\{X_n \neq X_n^c\}, \text{i.o.}) = 0$，所以除去概率为 0 的 ω 集外，$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} X_n^c$ 同时为收敛或发散. 但由定理 2.1 及条件(ii)、(iii)，$\sum_{n=1}^{\infty} X_n^c$ a.s. 收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a.s. 收敛. 证毕.

2.2 独立和的几种收敛性的等价性

设$\{X_n\}$是独立 r.v. 序列，记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$，我们将证明$\{S_n\}$的 a.s. 收敛性，依概率收敛性和依分布收敛性是等价的.

下列 Lévy 不等式是概率论中的另一重要不等式.

引理 2.3(Lévy 不等式) 对任给的 $\varepsilon > 0$，

$$P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}[S_k+m(S_n-S_k)]\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant 2P(S_n\geqslant\varepsilon), \tag{2.9}$$

$$P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k+m(S_n-S_k)|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant 2P(|S_n|\geqslant\varepsilon). \tag{2.10}$$

证 先证(2.9). 以 t 记 $1,\cdots,n$ 中使 $S_k+m(S_n-S_k)\geqslant\varepsilon$ 的最小整数 k；如果这样的 k 不存在，则令 $t=n+1$. 若记 $B_k=\{S_n-S_k\geqslant m(S_n-S_k)\}$，则

$$P(B_k)\geqslant 1/2.$$

因为事件 $\{t=k\}\in\sigma(X_1,\cdots,X_k)$，$B_k\in\sigma(X_{k+1},\cdots,X_n)$ 和

$$\{S_n\geqslant\varepsilon\}\supset\{S_n\geqslant\varepsilon,\ t\leqslant n\}$$
$$\supset\bigcup_{k=1}^{n}\{t=k,S_n-S_k-m(S_n-S_k)\geqslant 0\},$$

所以

$$P(S_n\geqslant\varepsilon)\geqslant\sum_{k=1}^{n}P(t=k)P\{S_n-S_k\geqslant m(S_n-S_k)\}$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}P(t=k)=\frac{1}{2}P(t\leqslant n)$$
$$=\frac{1}{2}P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}[S_k+m(S_n-S_k)]\geqslant\varepsilon\right\}.$$

(2.9) 式得证. 将此式用于 $-X_1,\cdots,-X_n$ 得

$$P\left\{\min_{1\leqslant k\leqslant n}[S_k+m(S_n-S_k)]\leqslant-\varepsilon\right\}\leqslant 2P(S_n\leqslant-\varepsilon).$$

此式与(2.9)结合即得(2.10).

定理 2.4 对 S_n，依概率收敛等价于 a.s. 收敛.

证 显然只需证明：若 S_n 依概率收敛则必 a.s. 收敛. 若 $S_n\xrightarrow{P}S$，则存在增的正整数序列 $\{n_k\}$ 使

$$\sum_{k=1}^{\infty}P\left\{|S_{n_k}-S|>2^{-k-1}\right\}<\infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理，$S_{n_k}\to S$ a.s. 此外

$$\sum_{k=1}^{\infty}P\left\{|S_{n_k}-S_{n_{k-1}}|>2^{-k}\right\}<\infty. \tag{2.11}$$

由 Levy 不等式(2.10)，对任给的 $\varepsilon>0$，

$$P\left\{\max_{n_{k-1}\leqslant n\leqslant n_k}|S_n-S_{n_{k-1}}+m(S_{n_k}-S_n)|\geqslant\varepsilon\right\}$$
$$=P\left\{\max_{n_{k-1}\leqslant n\leqslant n_k}|S_n-S_{n_{k-1}}+m((S_{n_k}-S_{n_{k-1}})\right.$$

$$-(S_n - S_{n_{k-1}}))| \geqslant \varepsilon\}$$

$$\leqslant 2P\{|S_{n_k} - S_{n_{k-1}}| \geqslant \varepsilon\}.$$

因此由(2.11)和Borel Cantelli引理

$$\max_{n_{k-1}<n\leqslant n_k} |S_n - S_{n_{k-1}} + m(S_{n_k} - S_n)| \to 0 \text{ a.s.} \tag{2.12}$$

但对 $n_{k-1} < n \leqslant n_k$ 有

$$|S_n - S + m(S_{n_k} - S_n)|$$
$$\leqslant |S_n - S_{n_{k-1}} + m(S_{n_k} - S_n)| + |S_{n_{k-1}} - S|,$$

故由(2.12)和 $S_{n_{k-1}} \to S$ a.s. 可知

$$\max_{n_{k-1}<n\leqslant n_k} |S_n - S + m(S_{n_k} - S_n)| \to 0 \text{ a.s.}$$

由 $S_{n_k} - S_n \xrightarrow{P} 0\ (n_k \geqslant n \to \infty)$，易知 $m(S_{n_k} - S_n) \to 0$，故 $S_n \to S$ a.s. 证毕.

进一步我们来证明独立 r.v. 和的依分布收敛等价于 a.s. 收敛.

定理 2.5 对 S_n，依分布收敛等价于 a.s. 收敛.

证 因为 r.v. 序列的依概率收敛性可推出依分布收敛性，故由定理2.4，我们只需证明：由 S_n 的依分布收敛可推出它的依概率收敛性.

记 X_n 的c.f. 为 f_n，则 $g_n = \prod_{k=1}^{n} f_k$ 和 $g_{nm} = \prod_{k=n+1}^{m} f_k (n < m)$ 分别表示 S_n 和 $S_m - S_n$ 的c.f. 因 $S_n \xrightarrow{d} S$，故对任意实数 t，$g_n(t) \to g(t)$，这里 $g(t)$ 是 S 的c.f. 注意到

$$g_n g_{nm} = g_m,$$

对使 $g(t) \neq 0$ 的 t，有

$$g_{nm}(t) \to 1, \quad m > n \to \infty. \tag{2.13}$$

因 g 是c.f.，所以在 $t = 0$ 的某个邻域 $|t| < h$ 内，$g(t) \neq 0$，因此(2.13)成立. 对一般的 t，取正整数 N，使 $|t|/N < h$，并记 $t_k = kt/N$，$\mu = t/N$，与 g_{nm} 对应的d.f. 为 F_{nm}. 由

$$|g_{nm}(t_k) - g_{nm}(t_{k-1})| \leqslant \int |e^{iux} - 1| \mathrm{d}F_{nm}(x)$$
$$\leqslant \left\{\int |e^{iux} - 1|^2 \mathrm{d}F_{nm}(x)\right\}^{1/2} = \left\{2\int(1 - \cos ux)\mathrm{d}F_{nm}(x)\right\}^{1/2}$$
$$= \{2\mathrm{Re}(1 - g_{nm}(u))\}^{1/2} \leqslant \left\{2\left|1 - g_{nm}\left(\frac{t}{N}\right)\right|\right\}^{1/2},$$

得

$$|g_{nm}(t)-1|\leqslant\sum_{k=1}^{N}|g_{nm}(t_k)-g_{nm}(t_{k-1})|$$

$$\leqslant N\left\{2\left|1-g_{nm}\left(\frac{t}{N}\right)\right|\right\}^{1/2}\to 0,\ m>n\to\infty.$$

这就是说(2.13)对所有的 t 都成立. 因此有

$$S_m-S_n\xrightarrow{P}0,\ m>n\to\infty,\tag{2.14}$$

也即 S_n 是依概率基本的,所以它依概率收敛.

2.3　0-1 律

r.v. 序列$\{X_n\}$的尾 σ 域定义作

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\sigma(X_k;k\geqslant n),$$

尾 σ 域中的事件称为**尾事件**.

如果$\{A_n\}$是独立事件序列,那么 $X_n=I_{A_n}$ 是独立 r.v.,且有

$$\{A_n,\text{i.o.}\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k.$$

下列定理是 Borel-Cantelli 引理的直接推论.

定理 2.6(Borel 0-1 律)　设$\{A_n\}$是独立事件序列,那么根据级数 $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$ 收敛或发散,$P\{A_n,\text{i.o.}\}$ 分别取 0 或 1.

对于一般的独立 r.v. 序列,成立着如下的 0-1 律.

定理 2.7(Kolmogorov 0-1 律)　设 A 是独立 r.v. 序列$\{X_n\}$的尾事件,则

$$P(A)=0\text{ 或 }1.\tag{2.15}$$

证　记 $\mathscr{T}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\sigma(X_k;k\geqslant n)$,对每一 $n\geqslant 1$, $\sigma(X_n)$ 与 $\sigma(X_k;k\geqslant n+1)$ 是相互独立的 σ 域,而 $\mathscr{T}\subset\sigma(X_k;k\geqslant n+1)$. 所以,对每一 n, $\sigma(X_n)$ 与 $\mathscr{T}$ 独立. 因此 $\mathscr{T}$ 与 $\sigma(X_n;n\geqslant 1)$ 独立. 但是 $\mathscr{T}\subset\sigma(X_n;n\geqslant 1)$,从而得知 $\mathscr{T}$ 与自身独立. 于是对 $A\in\mathscr{T}$,

$$P(A)=P(A\cap A)=P(A)^2,$$

此即(2.15)式.

推论 2.1　设$\{X_n\}$是独立 r.v. 序列,则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\to 0,\quad n\to\infty$$

的概率为 0 或 1.

证　对任意固定的正整数 N,事件

$$\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}X_k=0\right\}=\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{N+k}=0\right\}.$$

因此 $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k \to 0,\ n\to\infty\right\}$ 是一尾事件. 由定理 2.7，它的概率必为 0 或 1.

关于尾 σ 域可测的函数称为**尾函数**.

推论 2.2 独立 r.v. 序列的尾函数是退化的，也即 a.s. 等于常数.

证 设 Y 是任一尾函数. 由 0-1 律，对任一 $C\in(-\infty,\infty)$，$P(Y<C)=0$ 或 1. 若对一切 C，$P(Y<C)=0$，则 $P(Y=\infty)=1$；若对一切 C，$P(Y<C)=1$，则 $P(Y=-\infty)=1$. 不然的话，存在有限的 $C_0=\inf\{C: P(Y<C)=1\}$. 从而有 $Y=C_0$ a.s.

§3 强大数定律

定义 3.1 称 r.v. 序列 $\{Y_n; n\geqslant 1\}$ 是**强稳定的**，如果存在常数序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，$0<a_n\uparrow\infty$ 使得

$$\frac{1}{a_n}Y_n-b_n\to 0 \quad \text{a.s.} \tag{3.1}$$

定义 3.2 称 r.v. 序列 $\{X_n; n\geqslant 1\}$ 服从**强大数定律**，如果 $\{S_n\}$ 是强稳定的，这里 $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$.

为了讨论独立 r.v. 序列服从强大数定律的条件，先给出一个初等引理.

引理 3.1（Kronecker 引理） 设 $\{a_n\}$ 和 $\{x_n\}$ 是两实数序列，$0<a_n\uparrow\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}x_n/a_n$ 收敛，那么 $\sum_{i=1}^{n}x_i/a_n\to 0$.

证 记 $a_0=0$，定义 $y_1=0$，$y_n=\sum_{i=1}^{n-1}x_i/a_i$，$n\geqslant 2$. 则

$$y_n\to y=\sum_{i=1}^{\infty}x_i/a_i. \tag{3.2}$$

记

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}x_i/a_n&=\sum_{i=1}^{n}a_i(y_{i+1}-y_i)/a_n\\ &=y_{n+1}-\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})y_i/a_n.\end{aligned} \tag{3.3}$$

对任给的 $\varepsilon>0$，存在 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时 $|y_n-y|<\varepsilon$，故

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})y_i-y\right|&=\left|\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})(y_i-y)\right|\\ &\leqslant\frac{1}{a_n}\left|\sum_{i=1}^{n_0}(a_i-a_{i-1})(y_i-y)\right|+\frac{a_n+a_{n_0}}{a_n}\varepsilon.\end{aligned}$$

由此式易知

$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})y_i \to y. \tag{3.4}$$

将(3.2)和(3.4)代入(3.3)，即得引理的结论.

定理 3.1 设 $\{X_n\}$ 是独立 r.v. 序列，$\{g_n(x)\}$ 是偶函数序列，它们在区间 $x>0$ 中取正值、不减，而且对每一 n 满足下列条件之一：

(i) 在区间 $x>0$ 中，$x/g_n(x)$ 不减；

(ii) 在同一区间中，$x/g_n(x)$ 和 $g_n(x)/x^2$ 都是不增的，且 $EX_n=0$.

此外 $\{a_n\}$ 是常数列，满足 $0<a_n\uparrow\infty$ 和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Eg_n(X_n)}{g_n(a_n)}<\infty, \tag{3.5}$$

那么

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}X_k \to 0 \text{ a.s.} \tag{3.6}$$

证 由 Kronecker 引理，为证(3.6)，只需证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{a_n}\quad \text{a.s. 收敛.} \tag{3.7}$$

因 $g_n(x)$ 当 $x>0$ 时是不减的，故

$$P\{|X_n|\geqslant a_n\}\leqslant\int_{|X_n|\geqslant a_n}\frac{g_n(X_n)}{g_n(a_n)}\mathrm{d}P\leqslant\frac{Eg_n(X_n)}{g_n(a_n)}.$$

所以由(3.5)，

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{\left|\frac{X_n}{a_n}\right|\geqslant 1\right\}<\infty. \tag{3.8}$$

假设对某个 n，函数 $g_n(x)$ 满足条件(i)，那么在区间 $|x|<a_n$ 中

$$\frac{x^2}{a_n^2}\leqslant\frac{g_n^2(x)}{g_n^2(a_n)}\leqslant\frac{g_n(x)}{g_n(a_n)}.$$

对于满足条件(ii)的 n，在同一区间中我们有 $\frac{x^2}{g_n(x)}\leqslant\frac{a_n^2}{g_n(a_n)}$. 因此也有 $\frac{x^2}{a_n^2}\leqslant\frac{g_n(x)}{g_n(a_n)}$. 记 $Z_n=X_nI\{|X_n|<a_n\}$，则对任一 n，

$$\begin{aligned}EZ_n^2&=\int_{|X_n|<a_n}X_n^2\mathrm{d}P\\&\leqslant\frac{a_n^2}{g_n(a_n)}\int_{|X_n|<a_n}g_n(X_n)\mathrm{d}P\\&\leqslant\frac{a_n^2}{g_n(a_n)}Eg_n(X_n).\end{aligned}$$

由(3.5)我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^2}EZ_n^2<\infty. \tag{3.9}$$

此外,若条件(i)被满足,

$$\begin{aligned}|EZ_n| &= \left|\int_{|X_n|<a_n} X_n\mathrm{d}P\right| \\ &\leqslant \frac{a_n}{g_n(a_n)}\int_{|X_n|<a_n} g_n(X_n)\mathrm{d}P \\ &\leqslant \frac{a_n}{g_n(a_n)}Eg_n(X_n);\end{aligned}$$

另一方面,若条件(ii)被满足,

$$\begin{aligned}|EZ_n| &= \left|\int_{|X_n|\geqslant a_n} X_n\mathrm{d}P\right| \\ &\leqslant \frac{a_n}{g_n(a_n)}\int_{|X_n|\geqslant a_n} g_n(X_n)\mathrm{d}P \\ &\leqslant \frac{a_n}{g_n(a_n)}Eg_n(X_n).\end{aligned}$$

所以都有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|E\frac{Z_n}{a_n}\right|<\infty. \tag{3.10}$$

这样从(3.8)—(3.10)和三级数定理即知(3.7)成立. 证毕.

在这一定理中,令 $g_n(x)=|x|^p$, $p>0$, 可以导出若干重要的特例.

推论 3.1 设$\{X_n\}$是独立 r.v. 序列,$EX_n=0$. 正数序列 $a_n\uparrow\infty$,且对某 $1\leqslant p<2$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E|X_n|^p}{a_n^p}<\infty, \tag{3.11}$$

那么$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}X_k\to 0$ a.s.

推论 3.2 设$\{X_n\}$是独立r.v.序列. 正数序列$a_n\uparrow\infty$,且对某$0<p<1$, (3.11)成立,那么$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}X_k\to 0$ a.s.

对于 i.i.d. r.v. 序列,我们有更深入的结果.

定理 3.2 (Kolmogorov 强大数定律) 设$\{X_n\}$是 i.i.d. r.v. 序列,则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\to a \quad \text{a.s.} \tag{3.12}$$

(a 是有限常数)的充要条件是 EX_1 存在且等于 a.

证 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_1|\geqslant n)=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P(n-1\leqslant|X_1|<n)$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}E\{|X_1|I(n-1\leqslant|X_1|<n)\}$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}nP(n-1\leqslant|X_1|<n)$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_1|\geqslant n),$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_1|\geqslant n)\leqslant E|X_1|\leqslant 1+\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_1|\geqslant n). \tag{3.13}$$

如果$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\to a$ a.s.,那么

$$\frac{X_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}X_k\to 0\ \text{a.s.}$$

因此事件$\{|X_n|\geqslant n\}$发生无穷多次的概率为0. 由 Borel-Cantelli 引理

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|\geqslant n)<\infty.$$

从(3.13)及$\{X_n\}$同分布即得$E|X_1|<\infty$.

再来证明:如果$E|X_1|<\infty$,则$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\to EX_1$. 记$X_n'=X_nI(|X_n|<n)$.
因为由(3.13)及$\{X_n\}$同分布

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(X_n\neq X_n')=\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|\geqslant n)\leqslant E|X_1|<\infty.$$

再次利用Borel-Cantelli引理可知除去概率为0的ω集外,$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$与$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k'$同为收敛或发散,且在收敛时有相同的极限. 显然$EX_n'=E\{X_1I(|X_1|<n)\}\to EX_1$. 因此我们只需证明

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k'-EX_k')\to 0\ \text{a.s.} \tag{3.14}$$

就够了.但

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Var}X_n'}{n^2}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{EX_n'^2}{n^2}$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}P(k-1\leqslant|X_n|<k)$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}P(k-1\leqslant|X_1|<k)\\&\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}kP(k-1\leqslant|X_1|<k)\\&\leqslant 2(1+E|X_1|)<\infty,\end{aligned}$$

由推论 3.1,(3.14) 成立. 证毕.

下面我们把 Kolmogorov 强大数定律推广到 $p(0<p<2)$ 阶矩存在的情况.

定理 3.3 (Marcinkiewicz **强大数定律**)　设 $\{X_n\}$ 是 i.i.d. r.v. 序列,则对某个有限常数 a 以及 $p\in(0,2)$,

$$n^{-\frac{1}{p}}\sum_{k=1}^{n}(X_k-a)\to 0\quad \text{a.s.}\tag{3.15}$$

的充要条件是 $E|X_1|^p<\infty$. 这时,当 $1\leqslant p<2$ 时,$a=EX_1$;当 $0<p<1$ 时,a 可取任意值(因此常取 $a=0$).

证　注意到 $E|X_1|^p<\infty$ 等价于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(|X_1|\geqslant n^{1/p})<\infty$,从(3.15) 推出 $E|X_1|^p<\infty$ 的过程与定理 3.2 证明中的相应部分类似.

我们来证明相反的结论. 由定理 3.2,只需考虑 $p\neq 1$ 的情形. 而对 $1<p<2$,不失一般性,可设 $EX_1=0$. 因此我们的目的是要求证明

$$n^{-\frac{1}{p}}\sum_{k=1}^{n}X_k\to 0\quad \text{a.s.}\tag{3.16}$$

记 $X_n'=X_nI(|X_n|<n^{1/p})$. 利用 $E|X_1|^p<\infty$ 可证(3.16) 等价于

$$n^{-\frac{1}{p}}\sum_{k=1}^{n}X_k'\to 0\quad \text{a.s.}\tag{3.17}$$

我们先来证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{EX_n'}{n^{1/p}}\tag{3.18}$$

收敛. 记 $C_j=P(j-1<|X_1|^p\leqslant j)$. 首先考虑 $0<p<1$ 情形. 这时

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E|X_n'|}{n^{1/p}}&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{1}{p}}\sum_{j=1}^{n}j^{\frac{1}{p}}C_j=\sum_{j=1}^{\infty}j^{\frac{1}{p}}C_j\sum_{n=j}^{\infty}n^{-\frac{1}{p}}\\&\leqslant c\sum_{j=1}^{\infty}j^{\frac{1}{p}}C_jj^{-\frac{1}{p}+1}\\&=c\sum_{j=1}^{\infty}jC_j\leqslant c(1+E|X_1|^p)<\infty.\end{aligned}$$

此处 c 表示正常数. 对 $1\leqslant p<2$ 情形,注意到这时已假设 $EX_1=0$,故有

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{EX_n'}{n^{1/p}}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E(X_n - X_n')}{n^{1/p}}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{p}}\sum_{j=n}^{\infty} j^{\frac{1}{p}} C_j$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} j^{\frac{1}{p}} C_j \sum_{n=1}^{j} n^{-\frac{1}{p}} \leqslant c \sum_{j=1}^{\infty} jC_j < \infty.$$

这就证明了(3.18). 由 Kronecker 引理又有

$$n^{-\frac{1}{p}}\sum_{k=1}^{n} EX_k' \to 0.$$

所以欲证(3.17)，只需证

$$n^{-\frac{1}{p}}\sum_{k=1}^{n}(X_k' - EX_k') \to 0 \quad \text{a.s.} \tag{3.19}$$

这与(3.14)的证明类似，从略，定理证毕.

§4　完全收敛性

许宝騄和 Robbins(1947 年)提出了完全收敛性的概念.

定义 4.1　称r.v.序列$\{T_n; n \geqslant 1\}$**完全收敛**于常数C，如果对任意$\varepsilon > 0$，

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|T_n - C| > \varepsilon\} < \infty. \tag{4.1}$$

设S_n是r.v.序列$\{X_n; n \geqslant 1\}$的部分和，即$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$，$\{a_n; n \geqslant 1\}$是某个常数列，记$T_n = S_n/a_n$. 那么由 Borel-Cantelli 引理，从(4.1)可以推出

$$\frac{S_n}{a_n} \to C \quad \text{a.s.}$$

也就是说，$\{X_n\}$服从强大数定律. 因此完全收敛性是较 a.s. 收敛性更强的一种收敛性. 本节讨论较(4.1)更广的类型的级数的收敛性，给出了若干与这种收敛性等价的矩条件. 为此，首先给出几个引理.

引理 4.1　设$\{X_n; n \geqslant 1\}$是i.i.d.r.v.序列，$EX_1 = 0$且存在整数$k \geqslant 0$和$2^k < q \leqslant 2^{k+1}$使得$E|X_1|^q < \infty$. 记$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$，则有

$$E|S_n|^q \leqslant C\left\{\sum_{j=1}^{k} n^{q2^{-j}}[E|X_1|^{2^j}]^{q2^{-j}} + nE|X_1|^q\right\}. \tag{4.2}$$

证　对k使用归纳法. 当$k = 0$，即$1 < q \leqslant 2$时，由 Marcinkiewicz-Zygmund-Burkholder 不等式和c_r不等式(附录六，13 和四，2)，

$$E|S_n|^q \leqslant CE\Big(\sum_{j=1}^n X_j^2\Big)^{q/2} \leqslant CnE|X_1|^q,$$

得(4.2)成立. 假设它对 $k = m-1$ 是成立的,那么当 $k = m$ 时再次运用上述不等式可得

$$E|S_n|^q \leqslant CE\Big|\sum_{j=1}^n X_j^2\Big|^{q/2}$$

$$\leqslant CE\Big|\sum_{j=1}^n (X_j^2 - EX_j^2)\Big|^{q/2} + Cn^{q/2}(EX_1^2)^{q/2}. \qquad (4.3)$$

注意到 $2^{m-1} < q/2 \leqslant 2^m$,对(4.3)式右边第一项使用归纳假设,得证 $k = m$ 时(4.2)式成立. 因此它对一切整数 $k \geqslant 0$ 成立.

引理 4.2 设$\{X_n; n \geqslant 1\}$是对称的 i.i.d. r.v. 序列,则对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{2}P\{|S_{2^m}| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \min_{2^m < n \leqslant 2^{m+1}} P\{|S_n| \geqslant \varepsilon\}$$

$$\leqslant \max_{2^m < n \leqslant 2^{m+1}} P\{|S_n| \geqslant \varepsilon\} \leqslant 2P\{|S_{2^{m+1}}| \geqslant \varepsilon\}. \qquad (4.4)$$

证 由对称性,对 $n > 2^m$ 有

$$\frac{1}{2}P\{S_{2^m} \geqslant \varepsilon\} \leqslant P\{S_{2^m} \geqslant \varepsilon,\ S_n - S_{2^m} \geqslant 0\} \leqslant P\{S_n \geqslant \varepsilon\}.$$

以 $-S_j$ 代替 S_j, $j = 1, 2, \cdots$,可得 $\frac{1}{2}P\{S_{2^m} \leqslant -\varepsilon\} \leqslant P\{S_n \leqslant -\varepsilon\}$,所以有

$$\frac{1}{2}P\{|S_{2^m}| \geqslant \varepsilon\} \leqslant P\{|S_n| \geqslant \varepsilon\}.$$

进而有

$$\frac{1}{2}P\{|S_{2^m}| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \min_{2^m < n \leqslant 2^{m+1}} P\{|S_n| \geqslant \varepsilon\}. \qquad (4.5)$$

类似地可得(4.4)右边的不等式.

引理 4.3 设$\{X_n; n \geqslant 1\}$是独立对称的 r.v. 序列. 则对任意 $\varepsilon > 0$,

$$P\{|S_n| \geqslant \varepsilon\} \geqslant \sum_{j=1}^n P\{|X_j| \geqslant \varepsilon\} \cdot \Big(\frac{1}{2} - \sum_{j=1}^n P(|X_j| \geqslant \varepsilon)\Big). \qquad (4.6)$$

证 记 $A_j = \{X_j \geqslant \varepsilon\} \cap \Big\{\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^n X_i \geqslant 0\Big\}$. 我们有

$$P\{|S_n| \geqslant \varepsilon\} \geqslant P\Big\{\bigcup_{j=1}^n \Big[\{X_j \geqslant \varepsilon\} \cap \Big\{\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^n X_i \geqslant 0\Big\}\Big]\Big\}$$

$$= P\Big\{\bigcup_{j=1}^n A_j\Big\} \geqslant \sum_{j=1}^n P(A_j) - \sum_{i \neq j} P(A_i A_j),$$

其中

$$
P(A_j) \geqslant P\{X_j \geqslant \varepsilon\} \cdot P\Big\{ \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} X_i \geqslant 0 \Big\}
$$

$$
\geqslant \frac{1}{2} P\{X_j \geqslant \varepsilon\},
$$

$$
P(A_iA_j) \leqslant P\{\{X_i \geqslant \varepsilon\} \cap \{X_j \geqslant \varepsilon\}\} = P\{X_i \geqslant \varepsilon\}P\{X_j \geqslant \varepsilon\}.
$$

于是

$$
P\{S_n \geqslant \varepsilon\} \geqslant \sum_{j=1}^{n} P\{X_j \geqslant \varepsilon\}\Big\{\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{n} P\{X_i \geqslant \varepsilon\}\Big\}. \tag{4.7}
$$

以 $-X_j$ 代 X_j, $j=1,2,\cdots$, 可得

$$
P\{S_n \leqslant -\varepsilon\} \geqslant \sum_{j=1}^{n} P\{X_j \leqslant -\varepsilon\}\Big\{\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{n} P\{X_i \leqslant -\varepsilon\}\Big\}.
$$

(4.6) 得证.

利用上述引理,我们可以来讨论完全收敛性的等价条件了.

定理 4.1　设 $\{X_n; n \geqslant 1\}$ 是 i.i.d.r.v. 序列, $r > 1$, $0 < t < 2r$, 那么下列三条件等价:

(i) $E|X_1|^t < \infty$;

(ii) 对任意 $\varepsilon > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P\Big\{\Big|\dfrac{S_n - nb}{n^{r/t}}\Big| \geqslant \varepsilon\Big\} < \infty$;

(iii) 对任意 $\varepsilon > 0$,

$$
\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P\Big\{\sup_{k \geqslant n}\Big|\frac{S_k - kb}{k^{r/t}}\Big| \geqslant \varepsilon\Big\} < \infty,
$$

其中 $b = 0$, 若 $0 < t < r$; $b = EX_1$ 若 $r \leqslant t < 2r$.

证　首先我们来对(iii)作等价性变形. 易知(iii)等价于

$$
\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(r-1)} P\Big\{\sup_{k \geqslant 2^j}\Big|\frac{S_k - kb}{k^{r/t}}\Big| \geqslant \varepsilon\Big\} < \infty. \tag{4.8}
$$

显然从(4.8)可推出

$$
\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(r-1)} P\Big\{\max_{2^j \leqslant k < 2^{j+1}} |S_k - kb| \geqslant \varepsilon 2^{jr/t}\Big\} < \infty. \tag{4.9}
$$

反之,假若(4.9)成立,我们有

$$
\begin{aligned}
(4.8)\text{ 左端} &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(r-1)} \sum_{m=j}^{\infty} P\Big\{\max_{2^m \leqslant k < 2^{m+1}} \Big|\frac{S_k - kb}{k^{r/t}}\Big| \geqslant \varepsilon\Big\} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} P\Big\{\max_{2^m \leqslant k < 2^{m+1}} \Big|\frac{S_k - kb}{k^{r/t}}\Big| \geqslant \varepsilon\Big\} \sum_{j=1}^{m} 2^{j(r-1)} \\
&\leqslant c \sum_{m=1}^{\infty} 2^{m(r-1)} P\Big\{\max_{2^m \leqslant k < 2^{m+1}} |S_k - kb| \geqslant \varepsilon 2^{mr/t}\Big\} < \infty.
\end{aligned}
$$

因此(4.8)也成立.

下面我们来证明从条件(i)可推出(iii)，也即(4.9). 假设条件(i)成立，并在 $r\leqslant t<2r$ 时，令 $b=EX_1=0$ 记 $Y_n=X_nI\{|X_n|^t\leqslant 2^{jr}\eta\}$, $S_m=\sum_{n=1}^{m}Y_n$，其中 η 待定．于是

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{\infty}2^{j(r-1)}P\Big\{\max_{2^j\leqslant k<2^{j+1}}|S_k|\geqslant 2^{jr/t}\varepsilon\Big\}\\ &\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}2^{j(r-1)}\Big\{P\Big\{\bigcup_{i=1}^{2^{j+1}}(|X_i|^t\geqslant 2^{jr}\eta)\Big\}\\ &\quad+P\Big\{\max_{2^j\leqslant k<2^{j+1}}|S_{jk}|\geqslant 2^{jr/t}\varepsilon\Big\}\Big\}\overset{\text{def}}{=}I_1+I_2. \qquad (4.10)\end{aligned}$$

对 I_1，我们有

$$\begin{aligned}I_1&\leqslant 2\sum_{j=1}^{\infty}2^{jr}P\{|X_1|^t\geqslant 2^{jr}\eta\}\\ &\leqslant 2\sum_{j=1}^{\infty}2^{jr}\sum_{k=j}^{\infty}P\{2^{kr}\eta\leqslant|X_1|^t<2^{(k+1)r}\eta\}\\ &=2\sum_{k=1}^{\infty}P\{2^{kr}\eta\leqslant|X_1|^t<2^{(k+1)r}\eta\}\sum_{j=1}^{k}2^{jr}\\ &\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}2^{kr}\eta P\{2^{kr}\eta\leqslant|X_1|^t<2^{(k+1)r}\eta\}\\ &\leqslant CE|X_1|^t<\infty. \qquad (4.11)\end{aligned}$$

再来估计 I_2. 对 $2^j\leqslant k<2^{j+1}$，当 $0<t<r$ 时，只要 η 足够小，有

$$\begin{aligned}|ES_{jk}|&\leqslant 2^{j+1}E|X_1I\{|X_1|^t\leqslant 2^{jr}\eta\}|\\ &\leqslant 2^{j+1}E|X_1|^t(2^{jr}\eta)^{\frac{1}{t}-1}\\ &\leqslant C\eta^{\frac{1}{t}-1}2^{\frac{jr}{t}}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}2^{\frac{jr}{t}}. \qquad (4.12)\end{aligned}$$

而当 $r\leqslant t<2r$ 时，由于 $b=EX_1=0$，若取 $\eta=1$ 就有，

$$\begin{aligned}|ES_{jk}|&\leqslant 2^{j+1}|EX_1I\{|X_1|^t\leqslant 2^{jr}\}|\\ &=2^{j+1}|EX_1I\{|X_1|^t>2^{jr}\}|\\ &\leqslant 2^{j+1}E|X_1|^t2^{jr(\frac{1}{t}-1)}\\ &<C2^{j(\frac{r}{t}-r+1)}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}2^{jr/t}, \qquad (4.13)\end{aligned}$$

最后一个不等式对充分大的 j 都成立. 由(4.12)和(4.13)可知，为证 $I_2<\infty$，只须证明

$$I_2' = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(r-1)} P\{\max_{2^j \le k < 2^{j+1}} |S_{jk} - ES_{jk}| \ge 2^{jr/t}\varepsilon\} < \infty. \tag{4.14}$$

由于 $S_{jk} - ES_{jk} = \sum_{i=1}^{k}(Y_{ji} - EY_{ji})$ 为有界的 i.i.d.r.v. 的和，且期望值为 0，故对 $2^m < q < 2^{m+1}$，由 Kolmogorov 型不等式（见附录五，3(2)）和引理 4.1，有

$$\begin{aligned} & P\{\max_{1 \le k \le 2^{j+1}} |S_{jk} - ES_{jk}| \ge 2^{jr/t}\varepsilon\} \\ & \le \varepsilon^{-q} 2^{-jqr/t} E|S_{j2^{j+1}} - ES_{j2^{j+1}}|^q \\ & \le C\, 2^{-jqr/t}\Big\{\sum_{i=1}^{m} 2^{(j+1)q2^{-i}} (E|Y_{j1} - EY_{j1}|^{2^i})^{q2^{-i}} \\ & \quad + 2^{j+1} E|Y_{j1} - EY_{j1}|^q\Big\}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

由 Y_{ji} 的定义知：若 $E|X_1|^{2^i} < \infty$，则

$$(E|Y_{j1} - EY_{j1}|^{2^i})^{q2^{-i}} \le C. \tag{4.16}$$

若 $E|X_1|^{2^i} = \infty$，则 $t < 2^i$，因此

$$\begin{aligned} (E|Y_{j1} - EY_{j1}|^{2^i})^{q2^{-i}} & \le 2^q (E|Y_{j1}|^{2^i})^{q2^{-i}} \\ & \le 2^q\{(2^{jr/t}\eta)^{2^i - t} E|X_1|^t\}^{q2^{-i}} \\ & \le C\, 2^{jrq(1/t - 2^{-i})}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

此外

$$\begin{aligned} E|Y_{j1} - EY_{j1}|^q & \le 2^q E|Y_{j1}|^q \\ & \le 2^q\Big\{E|X_1|^q I(|X_1| \le \eta) \\ & \quad + \sum_{k=1}^{j} E|X_1|^q I(\eta 2^{(k-1)r/t} < |X_1| \le \eta 2^{kr/t})\Big\}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

注意到 $t < 2r$，取 $q > 0$ 充分大，使 $r - 1 - q(r/t - 1/2) < 0$，就有

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(r-1) - jqr/t + (j+1)q/2} \\ & \le 2^{q/2} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(r-1-q(r/t-1/2))} < \infty. \end{aligned} \tag{4.19}$$

对一切 i：$2^i < q$，有

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(r-1) - jqr/t + (j+1)q2^{-i} + jrq(1/t - 2^{-i})} \\ & = 2^{q2^{-i}} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j(r-1)(q2^{-i} - 1)} < \infty. \end{aligned} \tag{4.20}$$

若 $q > t$ 则

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(r-1)-jqr/t+j} \sum_{k=1}^{j} E|X_1|^q I\{\eta 2^{(k-1)r} < |X_1|^t \leqslant \eta 2^{kr}\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} E|X_1|^q I\{\eta 2^{(k-1)r} < |X_1|^t \leqslant \eta 2^{kr}\} \sum_{j=k}^{\infty} 2^{jr(1-q/t)} \\
&\leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} 2^{kr(1-q/t)} E|X_1|^q I\{\eta 2^{(k-1)r} < |X_1|^t \leqslant \eta 2^{kr}\} \\
&\leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} E|X_1|^t I\{\eta 2^{(k-1)r} < |X_1|^t \leqslant \eta 2^{kr}\} \\
&\leqslant CE|X_1|^t < \infty. \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

综合(4.14)—(4.21)式即得 $I'_2<\infty$，从而 $I_2<\infty$，由此及(4.10)和(4.11)式知(4.9)成立. 因此从条件(i)可推出(iii)，显然从(iii)可推出(ii).

现设条件(ii)对某个 b 成立，要证(i)也成立，同时还要证：当 $0<t<r$ 时 $b=0$；当 $r\leqslant t<2r$ 时 $b=EX_1$.

记 X_j^s 为 X_j 的对称化 r.v. 且 X_j^s，$j=1,2,\cdots$，相互独立. 记 $S_n^s=\sum_{j=1}^{n}X_j^s$. 由弱对称化不等式(附录三，5(1))和条件(ii)可推出：对任意的 $\varepsilon>0$，

$$
\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P\{|S_n^s| \geqslant \varepsilon n^{r/t}\} < \infty. \qquad (4.22)
$$

利用引理 4.2，并注意到 $r>1$，有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(r-1)} P\{|S_{2^j}^s| \geqslant \varepsilon 2^{(j+1)r/t}\} \\
&\leqslant C \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(r-1)} \min_{2^j<n\leqslant 2^{j+1}} P\{|S_n^s| \geqslant \varepsilon n^{r/t}\} \qquad (4.23) \\
&\leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P\{|S_n^s| \geqslant \varepsilon n^{r/t}\} < \infty.
\end{aligned}
$$

由此，并再次应用引理 4.2 就有

$$
\begin{aligned}
&\max_{2^j\leqslant n\leqslant 2^{j+1}} P\{|S_n^s| \geqslant \varepsilon n^{r/t}\} \\
&\leqslant 2P\{|S_{2^{j+1}}^s| \geqslant (\varepsilon 2^{-r/t}) 2^{(j+1)r/t}\} \to 0, \quad j\to\infty. \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

上式表明

$$
\frac{S_n^s}{n} \xrightarrow{P} 0, \quad n\to\infty,
$$

即满足弱大数定律. 由弱大数定律的充要条件，如推论 1.3 知，当 $n\to\infty$ 时

$$
nP\{|X_1^s| \geqslant n^{r/t}\} \to 0,
$$

$$
n^{1-r/t} E|X_1^s| I\{|X_1^s| < n^{r/t}\} \to 0.
$$

所以当n充分大时就有$nP\{|X_1^s|\geqslant n^{r/t}\}<1/b$. 在引理4.3中取$\varepsilon=n^{r/t}$,即得

$$\frac{1}{3}nP\{|X_1^s|\geqslant n^{r/t}\}\leqslant nP\{|X_1^s|\geqslant n^{r/t}\}\left[\frac{1}{2}-nP\{|X_1^s|\geqslant n^{r/t}\}\right]$$
$$\leqslant P\{|S_n^s|\geqslant n^{r/t}\}. \tag{4.25}$$

它与(4.22)相结合,得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-1}P\{|X_1^s|\geqslant n^{r/t}\}<\infty.$$

由此可得

$$\begin{aligned}E|X_1^s|^t&\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}2^{kr}P\{2^{kr}\leqslant|X_1^s|^t<2^{(k+1)r}\}\\&\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}P\{2^{kr}\leqslant|X_1^s|^t<2^{(k+1)r}\}\sum_{j=1}^{k}2^{jr}\\&=C\sum_{j=1}^{\infty}2^{jr}P\{|X_1^s|\geqslant 2^{jr/t}\}<\infty.\end{aligned}$$

也即条件(i)成立.

为证当$0<t<r(r\leqslant t<2r)$时$b=0(EX_1)$,只需运用反证法. 由于条件(i)成立,选$b_1=0$(当$0<t<r$)或EX_1(当$r\leqslant t<2r$),即可得到(iii). 由此再运用与上面类似的推理,可得

$$\frac{S_n-nb_1}{n^{r/t}}\to 0\quad \text{a.s.} \tag{4.26}$$

但由(ii)⇒(i)→(iii)知,对b也有

$$\frac{S_n-nb}{n^{r/t}}\to 0\quad \text{a.s.} \tag{4.27}$$

如果$b\neq b_1$,即会导致矛盾,定理4.1证毕.

如果$r=1$,我们有

定理4.2　设$\{X_n;n\geqslant 1\}$为i.i.d.r.v.序列,$0<t<2$,那么下列两条件等价:

(i) $E|X_1|^t<\infty$;

(ii) 对任意$\varepsilon>0$, $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}P\{|S_n-nb|\geqslant\varepsilon n^{1/t}\}<\infty$.

其中$b=0$,若$0<t<1$; $b=EX_1$,若$1\leqslant t<2$.

证　先来证明从条件(i)可推出(ii),b为定理中的取法,且当$1\leqslant t<2$时不妨假设$EX_1=0$. 定义

$$X_{kn}=\begin{cases}X_k, & \text{若 } |X_k|<n^{1/t},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad n=1,2,\cdots;\ k=1,\cdots,n.$$

当 $t \geq 1$ 时，注意到 $EX_k = 0$，我们有

$$n^{-1/t}|EX_{kn}| = n^{-1/t}|EX_kI(|X_k| \geq n^{1/t})|$$
$$\leq E|X_k|^t I(|X_k| \geq n^{1/t}) \to 0, \quad n \to \infty.$$

而对 $0 < t < 1$，当 $n \to \infty$ 时因为 $|X_1|/n^{1/t} \to 0$ a.s.，所以由控制收敛定理

$$n^{-1/t}|EX_{kn}| \leq \int_{|X_k| < n^{1/t}} |X_k|^t (|X_k|/n^{1/t})^{1-t} dP \to 0.$$

因此当 n 充分大时

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}P\{|S_n| > \varepsilon n^{1/t}\}$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}P\{\bigcup_{k=1}^{n}(|X_k| \geq n^{1/t})\}$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}P\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}(X_{kn} - EX_{kn})\right| > \varepsilon n^{1/t}(1 - \varepsilon^{-1}n^{1-1/t}|EX_{kn}|)\right\}$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_1| \geq n^{1/t}\}$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}P\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}(X_{kn} - EX_{kn})\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}n^{1/t}\right\}. \tag{4.28}$$

因为 $E|X_1|^t < \infty$，所以上式右端的第一个级数收敛. 关于第二个级数我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}P\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}(X_{kn} - EX_{kn})\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}n^{1/t}\right\}$$
$$\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-2/t}E\left\{\sum_{k=1}^{n}(X_{kn} - EX_{kn})\right\}^2$$
$$\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/t}EX_{1n}^2$$
$$\leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/t}\sum_{k=1}^{n}k^{2/t}P\{k-1 \leq |X_1|^t < k\}$$
$$= C\sum_{k=1}^{\infty} k^{2/t}P\{k-1 \leq |X_1|^t < k\}\sum_{n=k}^{\infty} n^{-2/t}$$
$$\leq C\sum_{k=1}^{\infty} kP\{k-1 \leq |X_1|^t < k\} < \infty.$$

下面来证明相反的结论. 当 $E|X_1|^t < \infty$ 时，仍设 $EX_1 = 0$. 记 X^s 为 X 的对称化随机变量. 首先证明

$$S_n^s/n^{1/t} \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty. \tag{4.29}$$

假设上式不成立，那么存在 $0 < \varepsilon < 1$ 和正整数列 $\{n_i\}$，使得对无穷多个 i，或

$P\{S_{n_i}^s/n_i^{1/r}>\varepsilon\}>\varepsilon$ 或 $P\{S_{n_i}^s/n_i^{1/r}<-\varepsilon\}>\varepsilon$. 不妨设有无穷多个 i 且设 $n_{i+1}>2n_i$,

$$P\{S_{n_i}^s/n_i^{1/r}>\varepsilon\}>\varepsilon. \tag{4.30}$$

由(4.30)并注意到对称性,对于每一 j, $n_i<j\leqslant n_{i+1}$,有

$$P\{S_j^s\geqslant j^{1/r}\varepsilon/2^{1/r}\}\geqslant P\Big\{S_{n_i}^s\geqslant n_i^{1/r}\varepsilon,\ \sum_{k=n_i+1}^{j}X_k^s\geqslant 0\Big\}\geqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此,

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}P\{S_n^s/n^{1/r}\geqslant\varepsilon/2^{1/r}\}$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=n_i}^{2n_i}n^{-1}P\{S_n^s/n^{1/r}\geqslant\varepsilon/2^{1/r}\}=\infty,$$

与(ii)矛盾. 所以(4.29)成立. 从而有(参见推论1.3)

$$nP\{|X_1^s|>n^{1/r}\varepsilon\}\to 0.$$

以下的证明与定理4.1的证明中的相应部分类似. 从略.

§5　重对数律

我们来给出概率论极限理论中的一类极为深刻的结果——重对数律,它们是强大数律的精确化. 这里只讨论两个重要情形. 首先是

定理5.1(Kolmogorov重对数律)　设 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是独立r.v.序列, $EX_n=0$, $EX_n^2=\sigma_n^2$, $B_n=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\to\infty$,且存在常数序列 $\{M_n\}$ 满足

$$M_n=o\big((B_n/\log\log B_n)^{1/2}\big),\quad |X_n|\leqslant M_n\quad \text{a.s.} \tag{5.1}$$

那么若记 $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$,则

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{(2B_n\log\log B_n)^{1/2}}=1\quad \text{a.s.} \tag{5.2}$$

注　我们称满足上式的r.v.序列 $\{X_n\}$ 服从**重对数律**. 显然,若 $\{X_n\}$ 满足定理的条件, $\{-X_n\}$ 也同样满足,由(5.2)立即可得

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{(2B_n\log\log B_n)^{1/2}}=-1\quad \text{a.s.} \tag{5.3}$$

因此,我们有

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{(2B_n\log\log B_n)^{1/2}}=1\quad \text{a.s.} \tag{5.4}$$

定理的证明需要下列关于独立有界 r.v. 和的指数不等式. 不失一般性, 我们可以假设 $\{M_n\}$ 是不减的. 记 $q_n(x) = P(S_n \geqslant x)$.

引理 5.1 若 $0 \leqslant xM_n \leqslant B_n$, 则

$$q_n(x) \leqslant \exp\left\{-\frac{x^2}{2B_n}\left(1-\frac{xM_n}{2B_n}\right)\right\}. \tag{5.5}$$

若 $xM_n \geqslant B_n$, 则

$$q_n(x) \leqslant \exp\{-x/4M_n\}. \tag{5.6}$$

证 设 $0 < t \leqslant M_n^{-1}$, 那么因为对任何 $k \geqslant 2$, $E|X_n|^k \leqslant M_n^{k-2}\sigma_n^2$, 故对每一 n 有

$$\begin{aligned} Ee^{tX_n} &= 1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^k}{k!}EX_n^k \\ &\leqslant 1+\frac{t^2}{2}\sigma_n^2\left(1+\frac{t}{3}M_n+\frac{t^2}{12}M_n^2+\cdots\right) \\ &\leqslant 1+\frac{t^2}{2}\sigma_n^2\left(1+\frac{t}{2}M_n\right) \leqslant \exp\left\{\frac{t^2\sigma_n^2}{2}\left(1+\frac{tM_n}{2}\right)\right\}, \end{aligned}$$

故

$$Ee^{tS_n} \leqslant \exp\left\{\frac{t^2B_n}{2}\left(1+\frac{t}{2}M_n\right)\right\}.$$

因此

$$q_n(x) \leqslant e^{-tx}Ee^{tS_n} \leqslant \exp\left\{-tx+\frac{t^2B_n}{2}\left(1+\frac{t}{2}M_n\right)\right\}.$$

当 $xM_n \leqslant B_n$ 时, 取 $t = x/B_n$; 当 $xM_n > B_n$ 时, 取 $t = 1/M_n$, 我们就分别得到不等式(5.5)和(5.6).

引理 5.2 设 $x_n > 0$, $x_nM_n/B_n \to 0$ 而 $x_n^2/B_n \to \infty$, 则对每个 $\mu > 0$ 和所有充分大的 n, 有

$$q_n(x_n) \geqslant \exp\left\{-\frac{x_n^2}{2B_n}(1+\mu)\right\}. \tag{5.7}$$

证 对 $x \geqslant 0$, 有 $e^{-x(1-x)} \geqslant 1-x(1-x) \geqslant 1/(1+x)$. 若 $0 \leqslant tM_n \leqslant 1$, 则

$$\begin{aligned} Ee^{tX_n} &\geqslant 1+\frac{t^2}{2}\sigma_n^2\left(1-\frac{t}{3}M_n-\frac{t^2}{12}M_n^2-\cdots\right) \\ &\geqslant 1+\frac{t^2}{2}\sigma_n^2\left(1-\frac{t}{2}M_n\right) \\ &\geqslant \exp\left\{\frac{t^2}{2}\sigma_n^2\left(1-\frac{t}{2}M_n-\frac{t^2}{2}\sigma_n^2\right)\right\} \end{aligned}$$

$$\geqslant \exp\left\{\frac{t^2}{2}\sigma_n^2(1 - tM_n)\right\}.$$

故

$$Ee^{tS_n} \geqslant \exp\left\{\frac{t^2}{2}B_n(1 - tM_n)\right\}.$$

记 $t = x_n/((1 - \delta)B_n)$，其中 $\delta > 0$ 将在后面选定. 则 $tM_n \to 0$. 所以对任一固定的 $\alpha > 0$，当 n 充分大时，我们有

$$Ee^{tS_n} \geqslant \exp\left\{\frac{t^2}{2}B_n(1 - \alpha)\right\}. \tag{5.8}$$

利用分部积分法，

$$Ee^{tS_n} = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{ty}\mathrm{d}q_n(y) = t\int_{-\infty}^{\infty} e^{ty}q_n(y)\mathrm{d}y = t\sum_{k=1}^{5}I_k, \tag{5.9}$$

这里 $I_1, I_2, \cdots, I_5$ 分别为 $e^{ty}q_n(y)$ 在区间 $(-\infty, 0)$, $(0, t(1-\delta)B_n)$, $(t(1-\delta)B_n, t(1+\delta)B_n)$, $(t(1+\delta)B_n, 8tB_n)$, $(8tB_n, \infty)$ 上的积分. 显然

$$tI_1 \leqslant t\int_{-\infty}^{0} e^{ty}\mathrm{d}y = 1.$$

对 I_5，若 $y \geqslant B_n/M_n$，则由引理 5.1 知 $q_n(y) \leqslant \exp\{-y/4M_n\} < \exp(-2ty)$. 后一不等号是因为 $tM_n \to 0$，所以对一切充分大的 n 成立. 在区间 $8tB_n \leqslant y \leqslant B_n/M_n$ 中，同一引理推出 $q_n(y) \leqslant \exp(-y^2/4B_n) \leqslant \exp(-2ty)$. 因此 $tI_5 \leqslant t\int_{8tB_n}^{\infty} e^{-ty}\mathrm{d}y < 1$. 回顾 t 的定义和条件 $x_n^2/B_n \to \infty$，由 (5.8) 可知对充分大的 n，$Ee^{tS_n} > 8$，所以有

$$tI_1 + tI_5 < 2 < Ee^{tS_n}/4. \tag{5.10}$$

再来估计 I_2 和 I_4. 因对 $0 \leqslant y \leqslant 8tB_n$，当 n 充分大时，$yM_n \leqslant 8tM_nB_n \leqslant B_n$，所以可利用(5.5). 再注意到 $yM_n/B_n \leqslant 8tM_n = 8x_nM_n/((1-\delta)B_n) \to 0$，对任一固定的 $\beta > 0$ 和充分大的 n，有

$$q_n(y) \leqslant \exp\left\{-\frac{y^2}{2B_n}(1 - \beta)\right\}.$$

因此

$$tI_2 + tI_4 \leqslant t\int_D \exp\{\psi(y)\}\mathrm{d}y,$$

其中 $D = (0, t(1-\delta)B_n) \cup (t(1+\delta)B_n, 8tB_n)$，而 $\psi(y) = ty - y^2(1-\beta)/(2B_n)$，它在点 $y_0 = tB_n/(1-\beta)$ 处有最大值. 若 β 选得足够小，点 y_0 含于区间 $(t(1-\delta)B_n, t(1+\delta)B_n)$ 中. 因此

$$\sup_D \psi(y) = \max\{\psi(t(1-\delta)B_n), \psi(t(1+\delta)B_n)\}.$$

若取 $\beta < \delta^2/(2(1+\delta)^2)$，就有

$$\psi(t(1+\delta)B_n) - \frac{t^2B_n}{2}(1-\delta^2+\beta(1+\delta)^2) \leqslant \frac{t^2B_n}{2}\left(1-\frac{\delta^2}{2}\right).$$

所以

$$tI_2 + tI_4 \leqslant 8t^2B_n\exp\left\{\frac{t^2B_n}{2}\left(1-\frac{\delta^2}{2}\right)\right\}.$$

注意到 $t^2B_n \to \infty$，当 n 充分大时，成立 $32t^2B_n \leqslant \exp\{t^2B_n\delta^2/8\}$. 由此并利用(5.8)，得

$$tI_2 + tI_4 \leqslant \frac{1}{4}\exp\left\{\frac{t^2B_n}{2}\left(1-\frac{\delta^2}{4}\right)\right\} \leqslant \frac{1}{4}Ee^{tS_n}. \tag{5.11}$$

函数 $q_n(y)$ 是不增的，由 $x_n = (1-\delta)tB_n$，我们可得

$$tI_3 \leqslant 2\delta t^2B_n\exp\{t^2B_n(1+\delta)\}q_n(x_n).$$

而由(5.9)－(5.11)，又有 $tI_3 > \frac{1}{2}Ee^{tS_n}$. 与上式结合，再利用(5.8)，并取 $\delta < 1/2$，则对充分大的 n 有

$$\begin{aligned} q_n(x_n) &\geqslant (tI_3\exp\{-t^2B_n(1+\delta)\})/(2\delta t^2B_n) \\ &\geqslant \frac{1}{2t^2B_n}\exp\left\{-\frac{t^2B_n}{2}(1+\alpha+2\delta)\right\} \\ &\geqslant \exp\left\{-\frac{x_n^2}{2B_n(1-\delta)^2}\left(1+\alpha+2\delta+\frac{\delta^2}{4}\right)\right\}. \end{aligned}$$

对于任意给定的 $\mu > 0$，只要取 $\alpha > 0$ 和 $\delta > 0$ 充分小，总能使

$$(1+\alpha+2\delta+\delta^2/4)/(1-\delta)^2 < 1+\mu.$$

因此对充分大的 n，(5.7) 成立. 证毕.

定理 5.1 的证明 考虑充分大的 n. 简记 $h(n) = (2B_n\log\log B_n)^{1/2}$.

首先我们来证明，对任给的 $\varepsilon > 0$

$$P\{S_n > (1+\varepsilon)h(n),\ \text{i.o.}\} = 0. \tag{5.12}$$

由(5.1) 和 $B_n \to \infty$ 得

$$\frac{B_n}{B_{n+1}} = 1 - \frac{\sigma_{n+1}^2}{B_{n+1}} = 1 + o\left(\frac{1}{\log\log B_{n+1}}\right) \to 1.$$

对任给的 $\tau > 0$，存在一个不减的整数列 $\{n_k\}$，使当 $k \to \infty$ 时 $n_k \to \infty$ 且

$$B_{n_k-1} \leqslant (1+\tau)^k < B_{n_k} \quad (k = 1,2,\cdots) \tag{5.13}$$

$(B_0 = 0)$. 故

$$1 > (1+\tau)^k/B_{n_k} \geqslant (B_{n_k} - \sigma_{n_k}^2)/B_{n_k} \to 1. \tag{5.14}$$

由此又有

$$B_{n_k} - B_{n_{k-1}} = B_{n_k}(1 - B_{n_{k-1}}/B_{n_k}) \sim B_{n_k}\tau/(1+\tau) \qquad (5.15)$$

($A \sim B$ 是指 $A/B \to 1$).

记 $\bar{S}_{n_k} = \max\limits_{n \leqslant n_k} S_n$. 我们来证明:对每一 $r > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{\bar{S}_{n_k} > (1+r)h(n_k)\} < \infty. \qquad (5.16).$$

我们先指出:对任何均值为0的r.v. $\mathbf{X}$ 成立 $|m(\mathbf{X})| \leqslant \sqrt{2\mathrm{Var}X}$. 这一点易从下列不等式看出:

$$P\{|X| \geqslant \sqrt{(2+\varepsilon)\mathrm{Var}X}\} \leqslant (2+\varepsilon)^{-1} < 1/2.$$

将这一事实应用于Levy不等式(2.8)便得

$$P\{\bar{S}_{n_k} > (1+r)h(n_k)\} \leqslant 2P\{S_{n_k} > (1+r)h(n_k) - \sqrt{2B_{n_k}}\}$$
$$\leqslant 2P\{S_{n_k} > (1+r_1)h(n_k)\},$$

其中第二个不等式对任意给定的 $r_1 \in (0,r)$ 和充分大的 n 成立. 由引理5.1和(5.13)式,对任意的 $\mu > 0$ 和充分大的 k,

$$P\{S_{n_k} > (1+r_1)h(n_k)\} \leqslant (\log B_{n_k})^{-(1-\mu)(1+r_1)^2}$$
$$\leqslant (k\log(1+\tau))^{-(1-\mu)(1+r_1)^2}.$$

选 μ 足够小,使得 $(1-\mu)(1+r_1)^2 > 1$,因此(5.16)成立.

对任给的 $\varepsilon > 0$,有

$$P\{S_n > (1+\varepsilon)h(n), \text{ i.o.}\}$$
$$< P\{\max_{n_{k-1} \leqslant n < n_k} S_n > (1+\varepsilon)h(n_{k-1}), \text{ i.o.}\}$$
$$\leqslant P\{\bar{S}_{n_k} > (1+\varepsilon)h(n_{k-1}), \text{ i.o.}\}.$$

由(5.14)知,对充分大的 k, $h(n_k)/h(n_{k-1}) < \sqrt{1+2\tau}$. 所以

$$P\{S_n > (1+\varepsilon)h(n), \text{ i.o.}\} \leqslant P\left\{\bar{S}_{n_k} > \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{1+2\tau}}h(n_k), \text{ i.o.}\right\}.$$

取 r 和 τ 使其满足 $(1+\varepsilon)/\sqrt{1+2\tau} > 1+r$,得

$$P\{S_n > (1+\varepsilon)h(n), \text{ i.o.}\} \leqslant P\{\bar{S}_{n_k} > (1+r)h(n_k), \text{ i.o.}\}.$$

由(5.16)和Borel-Cantelli引理,我们即得(5.12)成立.

用 $-S_n$ 代替 S_n,又有

$$P\{-S_n > (1+\varepsilon)h(n), \text{ i.o.}\} = 0.$$

因此

$$P\{|S_n| > (1+\varepsilon)h(n), \text{ i.o.}\} = 0. \qquad (5.17)$$

为完成定理的证明，我们只需证：对任给的 $\varepsilon > 0$，

$$P\{S_n > (1-\varepsilon)h(n), \text{ i.o.}\} = 1. \tag{5.18}$$

记

$$\psi(n_k) = \left[2(B_{n_k} - B_{n_{k-1}})\log\log(B_{n_k} - B_{n_{k-1}})\right]^{1/2}.$$

利用事件关系式 $P(A\cap B) \geqslant P(A) - P(B^c)$，我们有

$$\begin{aligned} & P\left\{S_{n_k} - S_{n_{k-1}} > (1-r)\psi(n_k)\right\} \\ & \geqslant P\left\{\left[S_{n_k} > (1-r/2)\psi(n_k)\right] \cap \left[S_{n_{k-1}} < (r/2)\psi(n_k)\right]\right\} \\ & \geqslant P\left\{S_{n_k} > (1-r/2)\psi(n_k)\right\} - P\left\{S_{n_{k-1}} \geqslant (r/2)\psi(n_k)\right\}. \end{aligned} \tag{5.19}$$

从(5.15)可以求得 $\psi(n_k)/h(n_{k-1}) \sim \tau^{1/2}$。由此并应用引理 5.1 对充分大的 k，有

$$\begin{aligned} & P\{S_{n_{k-1}} \geqslant (r/2)\psi(n_k)\} \\ & \leqslant P\{S_{n_{k-1}} \geqslant (r\sqrt{\tau}/3)h(n_{k-1})\} \\ & \leqslant (\log B_{n_{k-1}})^{-r^2\tau/5}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

应用引理 5.2，对任给的 $\mu > 0$，当 k 充分大时，

$$\begin{aligned} & P\{S_{n_k} > (1-r/2)\psi(n_k)\} \\ & \geqslant P\{S_{n_k} > (1-r/2)h(n_k)\} \\ & \geqslant (\log B_{n_k})^{-(1+\mu)(1-r/2)^2}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

将(5.20)、(5.21)代入(5.19)，注意到 $\log B_{n_k} \sim k\log(1+\tau)$，并取 τ 足够大就有

$$\begin{aligned} & P\{S_{n_k} - S_{n_{k-1}} > (1-r)\psi(n_k)\} \\ & > c\,(k^{-(1+\mu)(1-r/2)^2} - k^{-r^2\tau/5}) \\ & > (c/2)k^{-(1+\mu)(1-r/2)^2}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

因此若取 $\mu > 0$ 足够小，使 $(1+\mu)(1-r/2)^2 < 1$，则有

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{S_{n_k} - S_{n_{k-1}} > (1-r)\psi(n_k)\} = \infty.$$

再次利用 Borel-Cantelli 引理，我们求得对于任意的 $0 < r < 1$，

$$P\{S_{n_k} - S_{n_{k-1}} > (1-r)\psi(n_k), \text{ i.o.}\} = 1. \tag{5.23}$$

此外，当 $k\to\infty$ 时

$$(1-r)\psi(n_k)-2h(n_{k-1})$$
$$\sim\left[(1-r)\tau^{1/2}(1+\tau)^{-1/2}-2(1+\tau)^{-1/2}\right]\cdot h(n_k).$$

由(5.17)知存在零概率集 A，当 $\omega\notin A$ 时，存在 $n_0(\omega)$ 使当 $n\geqslant n_0(\omega)$ 时，$|S_n(\omega)|\leqslant 2h(n)$. 给定 $\varepsilon>0$ 后，取 $r>0$，$\tau>0$ 使

$$(1-r)\tau^{1/2}(1+\tau)^{-1/2}-2(1+\tau)^{-1/2}>1-\varepsilon,$$

同时 τ 还应保证(5.22)成立. 则由(5.17)和(5.23)得

$$\begin{aligned}&P\{S_{n_k}>(1-\varepsilon)h(n_k),\ \text{i.o.}\}\\&\geqslant P\{S_{n_k}>(1-r)\psi(n_k)-2h(n_{k-1}),\ \text{i.o.}\}\\&\geqslant P\{S_{n_k}-S_{n_{k-1}}>(1-r)\psi(n_k),\ \text{i.o.}\}=1.\end{aligned}$$

因此(5.18)式成立，证毕.

对于无界 r.v.，也有许多深入的研究，但多数都需附加一定的条件. 只有对 i.i.d.r.v.，我们有下列十分完美的结果. 为此先证明两个引理，在强逼近理论中对引理5.3有单独兴趣.

引理5.3　设 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是 i.i.d.r.v. 序列，$EX_n=0$，$EX_n^2=1$，记 $\sigma_n^2=\operatorname{Var}\{X_nI(|X_n|<\sqrt{n})\}$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$，$F_n(x)=P(S_n<x\sigma_n\sqrt{n})$；又设 L 和 $C>1$ 是正常数，$\{n_k\}$ 是正整数列，当 $k\to\infty$ 时 $n_k\sim LC^{2k}$，那么

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sup_x|F_{n_k}(x)-\Phi(x)|<\infty. \tag{5.24}$$

证　对 $k=1,2,\cdots,n$，记 $X_{nk}=X_kI\{|X_k|<\sqrt{n}\}$，$S'_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_{nk}$，$X$ 的 d.f. 为 $V(x)$，$\mu_n=\int_{|x|<\sqrt{n}}x\,\mathrm{d}V(x)$，$a_n=\int_{|x|<\sqrt{n}}|x|^3\mathrm{d}V(x)$. 写

$$\begin{aligned}\left|F_n\left(\frac{x}{\sigma_n}\right)-\Phi\left(\frac{x}{\sigma_n}\right)\right|\leqslant&\left|F_n\left(\frac{x}{\sigma_n}\right)-P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}S_n'<x\right)\right|\\&+\left|P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}S_n'<x\right)-\Phi\left(\frac{x-\sqrt{n}\mu_n}{\sigma_n}\right)\right|\\&+\left|\Phi\left(\frac{x-\sqrt{n}\mu_n}{\sigma_n}\right)-\Phi\left(\frac{x}{\sigma_n}\right)\right|\\\stackrel{\text{def}}{=}&I_1+I_2+I_3.\end{aligned}\tag{5.25}$$

因为

$$\begin{aligned}(S_n<x\sqrt{n})\subset(S_n'<x\sqrt{n})&\cup(|X_1|\geqslant\sqrt{n})\\&\cup\cdots\cup(|X_n|\geqslant\sqrt{n}),\end{aligned}$$
$$(S_n'<x\sqrt{n})\subset(S_n<x\sqrt{n})\cup(|X_1|\geqslant\sqrt{n})$$

$$\cup \cdots \cup (|X_n| \geqslant \sqrt{n}).$$

所以

$$I_1 = \left|F_n\left(\frac{x}{\sigma_n}\right) - P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}S_n' < x\right)\right| \leqslant nP(|X_1| \geqslant \sqrt{n}).$$

由 Berry-Esseen 定理(第二章定理 5.3),

$$\begin{aligned} I_2 = \Bigg| P\left\{\frac{1}{\sqrt{n}\,\sigma_n}\sum_{k=1}^{n}(X_{nk} - \mu_n) < \frac{x - \sqrt{n}\,\mu_n}{\sigma_n}\right\} \\ - \Phi\left(\frac{x - \sqrt{n}\,\mu_n}{\sigma_n}\right)\Bigg| \\ \leqslant \frac{c}{\sqrt{n}}(a_n + |\mu_n|^3). \end{aligned}$$

因 $|\mu_n|^3 \leqslant a_n$,所以又可写

$$I_2 < ca_n / \sqrt{n}.$$

对 I_3,因 $\sup_x|\Phi'(x)| < \infty$, $EX_n = 0$ 及 $\sigma_n^2 \to 1$,有

$$I_3 \leqslant c\sqrt{n}\,|\mu_n| \leqslant c\sqrt{n}\,b_n,$$

其中 $b_n = \int_{|x| \geqslant \sqrt{n}}|x|\,\mathrm{d}V(x)$. 将这些估计代入(5.25),得

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sup_x|F_n(x) - \Phi(x)| \\ \leqslant P(|X_1| \geqslant \sqrt{n}) + c(n^{-3/2}a_n + n^{-1/2}b_n). \end{aligned} \tag{5.26}$$

我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_1| \geqslant \sqrt{n}) = \sum_{n=1}^{\infty}P(X_1^2 \geqslant n) \leqslant EX_1^2 = 1; \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}n^{-3/2}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}n^{-3/2}E|X_{nk}|^3 \\ \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}n^{-3/2}\sum_{k=1}^{n}k^{3/2}P(k-1 \leqslant X_{nk}^2 < k) \\ \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=k}^{\infty}n^{-3/2}\right)k^{3/2}P(k-1 \leqslant X_1^2 < k) \\ \leqslant c\sum_{k=1}^{\infty}kP(k-1 \leqslant X^2 < k) \\ \leqslant c\,(EX^2 + 1) < \infty; \end{aligned} \tag{5.28}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1/2}b_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}n^{-1/2}\sum_{k=n}^{\infty}\sqrt{k+1}\,P(k \leqslant X_1^2 < k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{k} n^{-1/2}\right)\sqrt{k+1}\,P(k \leqslant X_1^2 < k+1)$$

$$\leqslant c\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)P(k \leqslant X_1^2 < k+1) < \infty. \tag{5.29}$$

现在我们来证明

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k P\{|X_1| \geqslant \sqrt{n_k}\} < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k^{-1/2} a_{n_k} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} n_k^{-1/2} b_{n_k} < \infty. \tag{5.30}$$

首先

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| \geqslant \sqrt{n}) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} P(|X_1| \geqslant \sqrt{n})$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{\infty}(n_{k+1}-n_k)P\{|X_1| \geqslant \sqrt{n_{k+1}}\}.$$

而 $n_{k+1}-n_k \sim (1-c^{-2})n_{k+1}$，由(5.27)得 $\sum_{k=1}^{\infty} n_k P(|X_1| \geqslant \sqrt{n_k}) < \infty$.

由于$\{a_n\}$是非降的，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}a_n \geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} n^{-3/2}a_n$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{\infty}(n_{k+1}-n_k)(n_{k+1}-1)^{-3/2}a_{n_k}.$$

而

$$(n_{k+1}-n_k)(n_{k+1}-1)^{-3/2} \sim c^{-3}(c^2-1)n_k^{-1/2}.$$

由(5.28)得 $\sum_{k=1}^{\infty} n_k^{-1/2}a_{n_k} < \infty$.

类似地有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}b_n \geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} n^{-1/2}b_n$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{\infty}(n_{k+1}-n_k)n_{k+1}^{-1/2}b_{n_{k+1}}.$$

而

$$n_{k+1}^{-1/2}(n_{k+1}-n_k) \sim n_{k+1}^{1/2}(1-c^{-2}).$$

由(5.29)得 $\sum_{k=1}^{\infty} n_k^{1/2}b_{n_k} < \infty$. (5.30)式得证. 由此及(5.26)即知(5.24)式成立.

引理 5.4 设序列$\{X_n\}$和$\{n_k\}$满足引理 5.3 的条件，$\{g(n)\}$是非降正数序列，那么下列两条件等价：

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} P(S_{n_k} > g(n_k)\sqrt{n_k}) < \infty$;

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} g^{-1}(n_k)\exp\{-g^2(n_k)/(2\sigma_{n_k}^2)\} < \infty$.

证 由引理 5.3，条件(i)等价于

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{1-\Phi(g(n_k)/\sigma_{n_k})\} < \infty. \tag{5.31}$$

若 $g(n_k) \not\to \infty$，则(5.31)和(ii)都不成立. 因此(i)和(ii)都不成立. 故可设 $g(n_k) \to \infty$. 这时

$$\begin{aligned}1-\Phi\left(\frac{g(n_k)}{\sigma_{n_k}}\right) &\sim \frac{\sigma_{n_k}}{\sqrt{2\pi}g(n_k)}\exp\left\{-\frac{g^2(n_k)}{2\sigma_{n_k}^2}\right\}\\ &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}g(n_k)}\exp\left\{-\frac{g^2(n_k)}{2\sigma_{n_k}^2}\right\}.\end{aligned}$$

由此知本引理成立.

下面我们就可给出概率论中著名定理之一——Hartman-Wintner 重对数律的证明.

定理 5.2 (Hartman-Wintner **重对数律**) 设$\{X_n; n \geqslant 1\}$是 i.i.d. r.v. 序列，$EX_n = 0$，$EX_n^2 = 1$，则

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = 1 \quad \text{a.s.}$$

证 记 $h(n) = (2n\log\log n)^{1/2}$. 首先来证明对任给的 $\varepsilon > 0$,

$$P(S_n > (1+\varepsilon)h(n),\ \text{i.o.}) = 0. \tag{5.32}$$

取 $c > 1$，$n_k = [c^{2k}]$，$k \geqslant 1$. 记 $\overline{S}_n = \max_{k\leqslant n} S_k$，则

$$P(S_n > (1+\varepsilon)h(n),\ \text{i.o.}) \leqslant P(\overline{S}_{n_k} > (1+\varepsilon)h(n_{k-1}),\ \text{i.o.}). \tag{5.33}$$

由 Levy 不等式(引理 2.3，(2.9)式)，仿照(5.16)式后的一段讨论，对任意给定的 $r > 0$ 和 $0 < r_1 < r$，当 k 充分大时可得

$$\begin{aligned}P(\overline{S}_{n_k} > (1+r)h(n_k)) &\leqslant 2P(S_{n_k} > (1+r)h(n_k) - \sqrt{2n_k})\\ &\leqslant 2P(S_{n_k} > (1+r_1)h(n_k)).\end{aligned} \tag{5.34}$$

记 $g(n) = (2\log\log n)^{1/2}$. 当 $k \to \infty$ 时

$$\frac{1}{g(n_k)}\exp\left\{-\frac{1}{2}(1+r)^2g^2(n_k)/\sigma^2_{n_k}\right\}$$

$$\leqslant \exp\left\{-\frac{1}{2}(1+r)g^2(n_k)\right\}=o(k^{-(1+r_1)}).$$

故

$$\sum_{k=1}^{\infty}g^{-1}(n_k)\exp\left\{-\frac{1}{2}(1+r_1)^2g^2(n_k)/\sigma^2_{n_k}\right\}<\infty.$$

由引理 5.4 及(5.34)式,对每一 $r>0$,我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}P\{S_{n_k}>(1+r)h(n_k)\}<\infty.$$

对任给的 $\varepsilon>0$,取 $c>1$,使得 $c^{-1}(1+\varepsilon)>1$. 再取 $r>0$,使 $(1+r)c<1+\varepsilon$. 注意到(5.33)和关系 $h(n_{k+1})\sim c\,h(n_k)$,即得(5.32)成立.

我们进一步来证明:对任给的 $\varepsilon>0$,

$$P(S_n>(1-\varepsilon)h(n),\ \text{i.o.})=1. \tag{5.35}$$

这与定理 5.1 证明中的后半部分完全类似. 记

$$u_k^2=n_k-n_{k-1}\sim n_k(1-c^{-2}),\quad v_k=(2\log\log u_k^2)^{1/2}\sim g(n_k).$$

写

$$P(S_{n_k}-S_{n_{k-1}}>(1-r)u_kv_k)=P(S_{n_k-n_{k-1}}>(1-r)u_kv_k).$$

若 $0<r_1<r<1$ 且 k 充分大,则

$$v_k^{-1}\exp\{-(1-r)^2v_k^2/(2\sigma^2_{n_k-n_{k-1}})\}$$

$$\geqslant v_k^{-1}\exp\{-(1-r_1)^2v_k^2/2\}\geqslant ck^{-(1-r_1)^2}(\log k)^{-1/2}.$$

由引理 5.4 得

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(S_{n_k}-S_{n_{k-1}}>(1-r)u_kv_k)=\infty.$$

以后的证明与(5.18)式证明中的相应部分完全类似,从略.

注　利用定理 5.1 及下列事实:对 $EX^2<\infty$ 的 r.v. X,有 $b_n=o(\sqrt{n/\log\log n})$ 使得 $\sum_{n=3}^{\infty}(2n\log\log n)^{-1/2}E(|X|I(|X|>b_n))<\infty$,可给出定理 5.2 的另一较简洁证明.

定理 5.2 中的矩的条件是必要的. 为证明这一事实,我们首先来证明下列引理.

引理 5.5　设 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是独立对称的 r.v. 序列,$\{a_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 是正数序列,$a_n\to\infty$. 若记

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k,\quad S_n'=\sum_{k=1}^{n}X_kI(|X_k|\leqslant c_k),$$

则从 $P\{\limsup\limits_{n\to\infty} S'_n/a_n > 1\} = 1$ 可推出 $P\{\limsup\limits_{n\to\infty} S_n/a_n > 1\} = 1$.

证 记 $N_m = \inf\{k: k \geq m,\ S'_k > a_k\}$（如$\{\cdot\}$为空集，则记 $N_m = \infty$）. 它是r.v. 又记 $X_k^* = X_k I(|X_k| \leq c_k) - X_k I(|X_k| > c_k)$ 由 X_i 的对称性假设可知$(X_1^*,\cdots,X_n^*)$ 与$(X_1,\cdots,X_n)$ 是同分布的. 因此对 $n > m$

$$
\begin{aligned}
&P\{S_n \geq S'_n,\ N_m = n\} \\
&= P\Big\{\sum_{k=1}^{n} X_k I(|X_k| > c_k) \geq 0,\ \sum_{k=1}^{n} X_k I(|X_k| \leq c_k) \geq a_n, \\
&\qquad\qquad S'_j < a_j,\ m \leq j < n\Big\} \\
&= P\Big\{\sum_{k=1}^{n} X_k^* I(|X_k^*| > c_k) \geq 0,\ \sum_{k=1}^{n} X_k^* I(|X_k^*| \leq c_k) \geq a_n, \\
&\qquad\qquad \sum_{i=1}^{j} X_i^* I(|X_i| \leq c_i) \leq a_j,\ m \leq j < n\Big\} \\
&= P\{S_n \leq S'_n,\ N_m = n\}.
\end{aligned}
$$

当 $n = m$ 时，上式两端也相等. 于是

$$
\begin{aligned}
P\Big\{\bigcup_{k=m}^{\infty}(S_k > a_k)\Big\} &\geq P\Big\{\bigcup_{k=m}^{\infty}(S'_k > a_k,\ S_k \geq S'_k)\Big\} \\
&= P\{S_{N_m} \geq S'_{N_m},\ N_m < \infty\} \\
&= \sum_{n=m}^{\infty} P\{S_n \geq S'_n,\ N_m = n\} \geq 1/2,
\end{aligned}
$$

由此我们有

$$
P\{\limsup_{n\to\infty} S_n/a_n \geq 1\} \geq P\{S_n > a_n,\ \text{i.o.}\} \geq 1/2.
$$

由 Kolmogorov 0-1 律即得引理的结论.

定理 5.3 设$\{X_n; n \geq 1\}$ 是 i.i.d. r.v. 序列，满足

$$
P\{\limsup_{n\to\infty} |S_n| / \sqrt{2n\log\log n} < \infty\} > 0,
$$

则有 $EX_1 = 0$, $EX_1^2 < \infty$.

证 由 Kolmogorov 0-1 律知，此时必有

$$
P\{\limsup_{n\to\infty} |S_n| / \sqrt{2n\log\log n} < \infty\} = 1. \tag{5.36}
$$

因此 $S_n/n \to 0$ a.s. 由 Kolmogorov 强大数定律得 $EX_1 = 0$.

记 $\tilde{X}_n$ 是 X_n 的对称化 r.v. 且对 $c > 0$，记

$$
X'_n = \tilde{X} I(|\tilde{X}_n| \leq c), \quad \sigma_c^2 = EX'^2_n.
$$

$\{X'_n;\ n \geq 1\}$ 满足定理 5.1 的条件，故有

$$P\left\{\limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k'\right)\Big/\sqrt{2n\log\log n}>\sigma_c^2/2\right\}=1.$$

由引理 4.5

$$P\left\{\limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\tilde{X}_k\right)\Big/\sqrt{2n\log\log n}>\sigma_c^2/2\right\}=1.$$

如果 $EX_1^2=\infty$，就有 $\sigma_c^2\to\infty$ $(c\to\infty)$. 于是

$$P\left\{\limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\tilde{X}_k\right)\Big/\sqrt{2n\log\log n}=\infty\right\}=1,$$

与(5.36) 式矛盾. 因此必有 $EX_1^2<\infty$. 证毕.

习　　题

1. 设 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是一致有界的 r.v. 序列. 证明：$\{X_n\}$ 服从弱大数定律的充要条件为

$$n^{-2}\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)\to 0\quad(n\to\infty).$$

2. 设 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是 i.i.d. r.v. 序列，$EX_1=a$，则对直线上任一有界连续函数 $f(x)$，

$$\lim_{n\to\infty}E[f((X_1+\cdots+X_n)/n)]=f(a).$$

3. 设 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是两两独立 r.v. 序列，$EX_n=a$，证明：$\{X_n\}$ 服从弱大数定律.

4. 试利用弱大数定律证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{g(x_1)+\cdots+g(x_n)}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\frac{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x},$$

其中 $f(x)$，$g(x)$ 是 $[0,1]$ 上正的连续函数，且存在常数 $c>0$ 使 $f(x)<cg(x)$.

5. 设 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是一列具有相同的数学期望、方差有界的 r.v.，且对 $j\neq k$，$EX_jX_k\leqslant 0$. 试证：$\{X_n\}$ 服从弱大数定律.

6. 设 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是独立 r.v. 序列，证明：$P\{\lim\limits_{n\to\infty}X_n=0\}=1$ 当且仅当对任给的 $\varepsilon>0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(|X_n|\geqslant\varepsilon)<\infty$.

7. 设 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是独立 r.v. 序列，则

$$P\left\{\sum_{n=1}^{\infty}X_n\text{收敛}\right\}=0\text{ 或 }1.$$

8. 设$\{X_n;n\geqslant 1\}$是独立r.v.序列，$EX_n=a_n>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\infty$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Var}(X_n)/\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k\Big)^2<\infty,$$

则以概率1有

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}X_k\Big)/\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k\Big)=1.$$

9. 设$\{X_n;n\geqslant 1\}$是两两独立、均值为零、方差有界的r.v.序列，则$\{X_n\}$服从强大数定律.

10. 设$\{X_n;n\geqslant 1\}$是独立r.v.序列，$EX_n=0$ $(n=1,2,\cdots)$，且对某一$r>1$，$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-(r+1)}E|X_n|^{2r}<\infty$，那么$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\to 0$ a.s.

11. 设$\{X_n;n\geqslant 1\}$是i.i.d.r.v.序列，那么$EX_1=0$，$EX_1^2<\infty$当且仅当对任一满足条件$\sum_{k=1}^{n}a_{nk}^2\to 1$的常数列$\{a_{nk};\ k=1,\cdots,n,\ n\geqslant 1\}$成立着$n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}a_{nk}X_k\to 0$ a.s.

12. 设$\{X_n;n\geqslant 1\}$是i.i.d.r.v.序列，$t\geqslant 1$，那么条件$E|X_1|^t<\infty$和$EX_1=b$等价于条件：对任给的$\varepsilon>0$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{t-2}P(|S_n/n-b|\geqslant\varepsilon)<\infty.$$

13. 设$\{X_n;n\geqslant 1\}$是i.i.d.r.v.序列，$P(X_1=0)<1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}X_n$ a.s.发散.如果$P(X_1\geqslant 0)=1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}X_n=\infty$ a.s.

14. 设$\{X_n;n\geqslant 1\}$是i.i.d.r.v.序列，那么$E\sup\limits_n|X_n/n|<\infty$当且仅当$E|X_1|\log^+|X_1|<\infty$.

15. 设$\{X_n;n\geqslant 1\}$是i.i.d.r.v.序列，那么$n^{-1}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|\xrightarrow{P}0$当且仅当$nP(|X_1|>n)=o(1)$；又$n^{-1}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|\to 0$ a.s.当且仅$E|X_1|<\infty$.

(提示：$P\big(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|>n\varepsilon\big)=P(|X_1|>n\varepsilon)\sum_{j=1}^{n}P^{j-1}(|X_1|\leqslant n\varepsilon)$.)

16. 证明：在定理5.1的条件下

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{\Big(\Big(\sum_{j=1}^{n}X_j^2\Big)\log\log\sum_{j=1}^{n}X_j^2\Big)^{1/2}}=\sqrt{2}\ \text{a.s.}$$

17. 设$\{X_n;n\geqslant 1\}$是i.i.d.r.v.序列，$EX_1=0$，$EX_1^2<\infty$.证明：

$$\liminf_{n\to\infty}|S_n|/\sqrt{n}=0 \quad \text{a.s.}$$

18. 设$\{X_n;n\geqslant 1\}$是独立、服从$N(0,\sigma_n^2)$分布的r.v.序列，满足条件：$s_n^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\to\infty$且$\sigma_n=o(s_n)$，证明$\{X_n\}$服从重对数律.

(提示：利用S_n/s_n的尾概率的估计.)

19. 设$\{X_n;n\geqslant 1\}$是i.i.d.r.v.序列，$EX_1^2=\infty$. 证明

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{(n\log\log n)^{1/2}}=\infty \quad \text{a.s.}$$

第四章　概率测度的弱收敛

在第二章中，我们讨论了 r.v.（组）列的依分布收敛性. 本章的主要目的在于把它推广到随机过程情形，即讨论随机过程列 $\{X_n(t); t\in T, n=1,2,\cdots\}$ 在样本空间中所导出的概率测度序列 $\{P_n; n=1,2,\cdots\}$ 的弱收敛性；给出独立 r.v.（组）列所产生的部分和过程弱收敛的条件，特别讨论它弱收敛于 Wiener 过程的条件.

度量空间上概率测度弱收敛的定义及其等价条件将在 §1 中给出. 为了作进一步讨论，我们在 §2 中，对一些典型的度量空间（如 $C[0,1]$）上的概率测度弱收敛进行分析，指明它与有限维欧氏空间上依分布收敛的区别. 在此基础上，给出一般度量空间上概率测度弱收敛的条件及独立 r.v. 组列所产生的部分和过程弱收敛于 Wiener 过程的条件. 为便于读者阅读，把本章用到的有关拓扑学、函数论等方面的一些基本概念和定理列于附录一.

§1　度量空间上的概率测度

设 (S,ρ) 是一个度量空间，$\mathscr{B}$ 是由 S 的一切开子集生成的 σ 域. 我们称 $\mathscr{B}$ 可测集是 S 中的 Borel 集. 定义在 $\mathscr{B}$ 上的实值函数 μ 称为一个测度，如果它非负、σ 可加且 $\mu(\varnothing)=0$.

当 $\mu(S)<\infty$ 时，称 μ 是**有限测度**. 特别当 $\mu(S)=1$ 时，称 μ 为**概率测度**.

在这一节中，我们将把实值 r.v. 的概率分布的一些性质推广到度量空间的概率测度上去.

定义 1.1　设 μ 是 $\mathscr{B}$ 上的有限测度，如果对集 $E\in\mathscr{B}$ 有

$$\mu(E)=\sup\{\mu(F);\ F\subset E,\ F\text{ 是闭集}\}$$
$$=\inf\{\mu(G);\ E\subset G,\ G\text{ 是开集}\},$$

则称集 E 是 **μ 正则的**. 若每一 $E\in\mathscr{B}$ 都是 μ 正则的，则称 μ 是一个**正则测度**.

由定义直接可知 $E\in\mathscr{B}$ 为 μ 正则的充要条件是对每一 $\varepsilon>0$，存在一个开集 G 和一个闭集 F，使得 $F\subset E\subset G$ 且 $\mu(G-F)<\varepsilon$.

定理 1.1　令 S 是度量空间，那么 $\mathscr{B}$ 上每一有限测度 μ 是正则的.

证　记 $\mathscr{R}$ 为 $\mathscr{B}$ 中所有 μ 正则集组成的集类. 我们来证 $\mathscr{R}=\mathscr{B}$. 首先证明 $\mathscr{R}$ 是 σ 域. 因 $\varnothing$ 与 S 既是开集又是闭集，故 $\varnothing, S\in\mathscr{R}$. 设 $E\in\mathscr{R}$ 且 $\varepsilon>0$,

那么由定义 1.1，存在一开集 $G_\varepsilon \supset E$ 及闭集 $F_\varepsilon \subset E$，使得

$$\mu(G_\varepsilon) - \varepsilon/2 < \mu(E) < \mu(F_\varepsilon) + \varepsilon/2.$$

于是 $\mu(G_\varepsilon - F_\varepsilon) = \mu(G_\varepsilon) - \mu(F_\varepsilon) < \varepsilon$. 当取补集时，就有 $G_\varepsilon^c \subset E^c \subset F_\varepsilon^c$，且 $F_\varepsilon^c - G_\varepsilon^c = G_\varepsilon - F_\varepsilon$，此时 G_ε^c 是闭集，F_ε^c 是开集. 由此可得 $E^c \in \mathscr{R}$.

现设 $E_n \in \mathscr{R}$，$n = 1,2,\cdots$，记 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. 下证 $E \in \mathscr{R}$. 设 $\varepsilon > 0$. 由定义存在开集 $G_{n,\varepsilon} \supset E_n$ 及闭集 $F_{n,\varepsilon} \subset E_n$，使得

$$\mu(G_{n,\varepsilon} - F_{n,\varepsilon}) < \varepsilon/3^n.$$

记 $G_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{n,\varepsilon}$. 显然 G 是开集. 因 μ 是有限测度，易见存在 $n_0 = n_0(\varepsilon)$ 使得

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{n,\varepsilon} \setminus \bigcup_{n=1}^{n_0} F_{n,\varepsilon}\right) < \varepsilon/2.$$

记 $F_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{n_0} F_{n,\varepsilon}$，它是闭集且有

$$F_\varepsilon \subset E \subset G_\varepsilon$$

及

$$\mu(G_\varepsilon - F_\varepsilon) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_{n,\varepsilon} - F_{n,\varepsilon}) + \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{n,\varepsilon} \setminus \bigcup_{n=1}^{n_0} F_{n,\varepsilon}\right)$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{3^n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

这就得证 $E \in \mathscr{R}$. 因此 $\mathscr{R}$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个子 σ 域.

其次，如果我们能证明 $\mathscr{R}$ 包含 S 中的所有开子集，或等价地，$\mathscr{R}$ 包含 S 中的所有闭子集，那么就得证 $\mathscr{R} = \mathscr{B}$. 设 F 是 S 的一个闭子集，它是一个 G_δ 集，即 F 可以写成 S 中可列多个开集之交. 事实上，若以

$$\rho(x, F) = \inf_{y \in F} \rho(x, y)$$

记 x 与集 F 的距离，那么可写

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x : \rho(x, F) < \frac{1}{n} \right\}.$$

因此存在一列不增的开集 $\{G_n\}$，使 $F = \lim_{n \to \infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. 因 μ 有限，所以 $\mu(F) = \lim_{n \to \infty} \mu(G_n)$. 设 $\varepsilon > 0$. 存在 $N_0 = N_0(\varepsilon)$ 使得 $\mu(G_{N_0} - F) < \varepsilon$. 记 $F_\varepsilon = F$，$G_\varepsilon = G_{N_0}$，于是

$$F_\varepsilon \subset F \subset G_\varepsilon, \qquad \mu(G_\varepsilon - F_\varepsilon) < \varepsilon,$$

即 $F \in \mathscr{R}$. 证毕.

注　由定理 1.1，$\mathscr{B}$ 上的有限测度 μ 可由所有闭集 F 上的值 $\mu(F)$ 确定.

现在我们把弱收敛的概念拓广到度量空间 (S, ρ) 的测度上去.

定义 1.2 设 $C = C(S)$ 是由定义在 S 上的一切有界实值连续函数组成的集. 又设 $\{\mu, \mu_n; n \geqslant 1\}$ 是 S 上的有限测度序列,若对每一 $g \in C(S)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_S g\mathrm{d}\mu_n = \int_S g\mathrm{d}\mu, \tag{1.1}$$

则称 μ_n **弱收敛**于 μ,记作 $\mu_n \Rightarrow \mu$.

定义 1.3 如果 $E(\in \mathscr{B})$ 的边界集 $\partial E = \bar{E} - E^0$ 的 μ 测度为 0,就称 E 是 μ **连续集**,其中 $\bar{E}$ 是 E 的闭包,E^0 是 E 的内部.

设 S 是度量空间,$\mathscr{B}$ 是它的 Borel σ 域,又$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ 是一个概率空间. 我们称映射 $X: \Omega \to S$ 为 $\mathscr{A}$ **可测的**,若对每一 $B \in \mathscr{B}$ 有$\{\omega: X(\omega) \in B\} \in \mathscr{A}$,并称 X 为**随机元**. 它在 $\mathscr{B}$ 上导出的概率分布 P_X 由

$$P_X(B) = PX^{-1}(B), \qquad B \in \mathscr{B}$$

定义. 假设存在一列定义在$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ 上取值于 S 中的随机元列$\{X, X_n; n \geqslant 1\}$,记它们对应的概率分布列为$\{P_X, P_{X_n}; n \geqslant 1\}$. 如果

$$P_{X_n} = PX_n^{-1} \Rightarrow P_X = PX^{-1},$$

那么就称 X_n **依分布收敛于** X,简记为 $X_n \Rightarrow X$ 或 $X_n \xrightarrow{d} X$. 显然,概率测度弱收敛的每一结果对应着依分布收敛的相应结果,反之亦然.

定理 1.2 设$\{\mu, \mu_n; n \geqslant 1\}$ 是 $\mathscr{B}$ 上的有限测度列,那么下列事实等价:

(i) $\mu_n \Rightarrow \mu$;

(ii) 对每一闭集 F, $\mu(F) \geqslant \limsup\limits_{n\to\infty} \mu_n(F)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(S) = \mu(S)$;

(iii) 对每一开集 G, $\mu(G) \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \mu_n(G)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(S) = \mu(S)$;

(iv) 对每一 μ 连续集 E, $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(E) = \mu(E)$.

证 (i)$\Rightarrow$(ii) 设 F 是 S 的任一闭子集,对每一 $N \geqslant 1$,记 $F_N = \{x \in S: \rho(x, F) < 1/N\}$,那么 F 与 F_N^c 是互不相交的闭集. 可以证明,存在函数 $g_N \in C(S)$,使 $0 \leqslant g_N \leqslant 1$,对 $x \in F$, $g_N(x) = 1$,而对 $x \in F_N^c$, $g_N(x) = 0$. 于是对每一 $N \geqslant 1$ 有

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\mu_n(F) &\leqslant \limsup_{n\to\infty}\int_S g_N\mathrm{d}\mu_n = \int_S g_N\mathrm{d}\mu \\ &= \int_{F_N} g_N\mathrm{d}\mu \leqslant \mu(F_N).\end{aligned}$$

因 $F_N \downarrow F$ 且 μ 是有限测度,所以 $\lim\limits_{N\to\infty}\mu(F_N) = \mu(F)$. 由上式就得

$$\mu(F) \geqslant \limsup_{n\to\infty}\mu_n(F).$$

(ii)$\Rightarrow$(iii) 由闭集和开集的互补性即得.

(iii)$\Rightarrow$(iv) 设 E 是任给的 μ 连续集. 那么 $\mu(\bar{E} - E^0) = 0$. 因 $\bar{E}$ 是闭集,

E^0 是开集，由(iii)及(ii)有

$$\mu(E^0) \leqslant \liminf_{n\to\infty}\mu_n(E^0) \leqslant \liminf_{n\to\infty}\mu_n(E)$$

和

$$\mu(\overline{E}) \geqslant \limsup_{n\to\infty}\mu_n(\overline{E}) \geqslant \limsup_{n\to\infty}\mu_n(E).$$

由于此时 $\mu(\overline{E}) = \mu(E) = \mu(E^0)$，从而(iv)成立.

(iv)⇒(i) 设对每一 μ 连续集 E 有 $\lim_{n\to\infty}\mu_n(E) = \mu(E)$. 现证(1.1)式成立. 对任给 $g \in C(S)$，设 μ_0 是按下式定义的 $\mathbf{R}^1$ 的 σ 域上的有限测度：

$$\mu_0(B) = \mu\{x \in S: g(x) \in B\},$$

其中 B 是 $\mathbf{R}^1$ 的 Borel 集，即 $\mu_0 = \mu g^{-1}$. 显然 μ_0 是有限测度. 又因 g 有界，故存在一闭区间 $[a,b]$，使得 $a < g(x) < b$. 注意到 μ_0 至多只有可列多个测度为正的单点集，故对任给的 $\varepsilon > 0$，可选取一个分划 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$，使得对 $j = 1,2,\cdots,N$，

$$t_j - t_{j-1} < \varepsilon$$

且

$$\mu\{x \in S: g(x) = t_j\} = \mu_0(\{t_j\}) = 0.$$

记 $E_j = \{x \in S: t_{j-1} < g(x) \leqslant t_j\}$，$j = 1,\cdots,N$. 那么 $E_1,E_2,\cdots,E_N$ 是 S 中两两不相交的 Borel 集，

$$S = \bigcup_{j=1}^{N} E_j,$$

且 $\overline{E}_j - E_j^0 \subset \{x \in S: g(x) = t_{j-1}\} \cup \{x \in S: g(x) = t_j\}$. 因此 $\mu(\overline{E}_j - E_j^0) = 0$，$j = 1,2,\cdots,N$. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(E_j) = \mu(E_j), \quad j = 1,2,\cdots,N.$$

设 h 是 S 上如下的简单函数：

$$h = \sum_{j=1}^{N} t_j I_{E_j},$$

那么

$$\sup_{x\in S}|g(x) - h(x)| < \varepsilon.$$

对于 $n \geqslant 1$，我们有

$$\left|\int_S g\mathrm{d}\mu_n - \int_S g\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_S |g - h|\mathrm{d}\mu_n + \left|\int_S h\mathrm{d}\mu_n - \int_S h\mathrm{d}\mu\right| + \int_S |g - h|\mathrm{d}\mu$$

$$\leqslant \varepsilon\mu_n(S) + \sum_{j=1}^{N}|t_j| \cdot |\mu_n(E_j) - \mu(E_j)| + \varepsilon\mu(S).$$

因 $S, E_j (j = 1,\cdots,N)$ 是 μ 连续集，由 ε 任意性即得(i).

推论 1.1 设 μ 与 ν 是度量空间 S 的 σ 域上两个有限测度，若对任一 $g \in C(S)$

满足

$$\int_S g\mathrm{d}\mu = \int_S g\mathrm{d}\nu,$$

那么 $\mu = \nu$.

证　对每一 $n \geqslant 1$，令 $\mu_n = \nu$，那么由 $\mu_n \Rightarrow \mu$ 及定理 1.2 可得对所有闭集 F 有 $\nu(F) \leqslant \mu(F)$. 由对称性，也有 $\mu(F) \leqslant \nu(F)$，即对 S 中一切闭集，μ 与 ν 是相同的. 由此按定理 1.1 后的注即得 $\mu = \nu$.

推论 1.2　若 $\mu_n \Rightarrow \mu$ 且 $\mu_n \Rightarrow \nu$，则 $\mu = \nu$.

由定理 1.2 还可推出度量空间上测度弱收敛的下述充分条件，它们的证明从略.

定理 1.3　设 $\{\mu, \mu_n; n \geqslant 1\}$ 是度量空间 (S, ρ) 上的有限测度列，又设 (S, ρ) 的可测集类 $\mathscr{F} \subset \mathscr{B}$ 满足：

(i) $\mathscr{F}$ 关于有限交封闭；

(ii) S 的任一开子集是 $\mathscr{F}$ 中元的可列并.

那么若对任一 $A \in \mathscr{F}$ 成立 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A) = \mu(A)$，就有

$$\mu_n \Rightarrow \mu.$$

推论 1.3　设 $\{\mu, \mu_n; n \geqslant 1\}$ 是可分度量空间 S 上的有限测度列，S 的可测集类 $\mathscr{F} \subset \mathscr{B}$ 满足：

(i) $\mathscr{F}$ 关于有限交封闭；

(ii) 对任一 $x \in S$ 及 $\varepsilon > 0$ 有 $A \in \mathscr{F}$，使得 $x \in A^0 \subset A \subset S_x(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{y: \rho(x, y) < \varepsilon\}$.

那么若对任一 $A \in \mathscr{F}$ 成立 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A) = \mu(A)$，就有

$$\mu_n \Rightarrow \mu.$$

推论 1.4　设 S 是可分度量空间，若对 S 中任意有限个开球的交 A，当 $\mu(\partial A) = 0$ 时有

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(A) = \mu(A),$$

那么有 $\mu_n \Rightarrow \mu$.

最后，我们将定理 1.2 的(iii)改为函数形式.

定理 1.4　有限测度列 $\{\mu_n; n \geqslant 1\}$ 弱收敛于有限测度 μ 的充要条件是对每一个非负的下半连续的 f（使对每一非负实数 d，$\{x: x \in S, f(x) > d\}$ 是 (S, ρ) 中的开集），有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_S f\mathrm{d}\mu_n \geqslant \int_S f\mathrm{d}\mu. \tag{1.2}$$

证　注意到若 G 为开集，则 $I_G(x)$ 是下半连续的，故由定理 1.2(iii) 即可

推出条件是充分的.

现证必要性. 注意到若对有界的 f,(1.2) 式成立,则由 $f\wedge N$ [*] 的下半连续性及

$$\liminf_{n\to\infty}\int_S f\mathrm{d}\mu_n \geqslant \liminf_{n\to\infty}\int_S (f\wedge N)\mathrm{d}\mu_n \geqslant \int_S (f\wedge N)\mathrm{d}\mu$$

和单调收敛定理可得

$$\liminf_{n\to\infty}\int_S f\mathrm{d}\mu_n \geqslant \int_S f\mathrm{d}\mu.$$

因此只需证明当 $\mu_n\Rightarrow\mu$ 时,对有界下半连续 f 成立(1.2). 不失一般性可设 $0\leqslant f\leqslant 1$. 令

$$A_{mk}=\{x: f(x)>k/m\},\quad k=0,1,\cdots,m-1,\ m\geqslant 1,$$

$$f_m=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}I_{A_{mk}},$$

则 f_m 是下半连续的,且对每一 x,存在最大的 k_0,使

$$x\in A_{mk},\qquad 0\leqslant k\leqslant k_0;$$

$$x\notin A_{mk},\qquad k_0+1\leqslant k\leqslant m-1.$$

所以

$$|f(x)-f_m(x)|=\left|f(x)-\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{k_0}I_{A_{mk}}(x)\right| =\left|f(x)-\frac{k_0}{m}\right|\leqslant\frac{1}{m}.$$

由此即得

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\int_S f\mathrm{d}\mu_n &\geqslant \lim_{n\to\infty}\int_S f_m\mathrm{d}\mu_n-\frac{1}{m}\geqslant\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\liminf_{n\to\infty}\mu_n(A_{mk})-\frac{1}{m}\\ &\geqslant\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\mu(A_{mk})-\frac{1}{m}=\int_S f_m\mathrm{d}\mu-\frac{1}{m}\\ &\geqslant\int_S f\mathrm{d}\mu-\frac{2}{m}.\end{aligned}$$

让 $m\to\infty$ 就得证(1.2) 成立. 证毕.

§2　几个常见的度量空间上概率测度的弱收敛性

为了进一步讨论度量空间上概率测度弱收敛的条件,在这里我们具体分

---

[*] $x\wedge y=\max(x,y)$.

析几个典型的度量空间上概率测度弱收敛的特征，以找出问题的症结所在. 在此之前先引入两个概念.

2.1 **确定类与收敛确定类**

定义 2.1 设$(S,\rho,\mathscr{B})$是度量可测空间，集类$\mathscr{S}(\subset\mathscr{B})$称为**确定类**，如果对$(S,\mathscr{B})$上任两概率测度$P$和$Q$，对任一$A\in\mathscr{S}$，满足$P(A)=Q(A)$时，就有$P=Q$，也即可推出对任一$B\in\mathscr{B}$，$P(B)=Q(B)$. 称$\mathscr{S}$为**收敛确定类**，如果对$(S,\mathscr{B})$上任一概率测度列$\{P,P_n,n\geq 1\}$，对$\mathscr{S}$中一切$P$连续集$A$，若成立$P_n(A)\to P(A)$，就有$P_n\Rightarrow P$.

由定理 1.1 的证明可知闭集类是确定类. 任一个生成$\mathscr{B}$的π系*)也是确定类. 又由推论 1.4 可知，可分度量空间中开球的有限交全体是一个收敛确定类. 容易看出，若$\mathscr{S}$是一个收敛确定类，则$\mathscr{S}$也是一个确定类. 反之不真. 例如$S=[0,1)$，$\mathscr{B}$为$[0,1)$中一切L可测集，ρ为普通距离，$\mathscr{S}$为一切半开半闭区间$[a,b)$，$0<a,b<1$. 易见$\mathscr{S}$是确定类. 现设P_n,P分别是概率为1地取值$1-1/n$，0的r.v. 的概率分布. 对任一$[a,b)\in\mathscr{S}$，$P\{\partial[a,b)\}=P\{a,b\}=0$，而当$n(>(1-b)^{-1})$趋向$\infty$时，

$$P_n\{[a,b)\}=0\to P\{[a,b)\}=0,$$

然而P_n不弱收敛于P，即$\mathscr{S}$不是收敛确定类.

下面我们依次来讨论k维欧氏空间$\mathbf{R}^k$，无穷维空间$\mathbf{R}^\infty$，空间$C[0,1]$上概率测度弱收敛性的特性.

2.2 $\mathbf{R}^k$

设$\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{R}^k$. 记$\mathbf{a}\leqslant\mathbf{b}$当且仅当它们的分量满足$a_i\leqslant b_i(i=1,\cdots,k)$. 记$\mathbf{e}=(1,\cdots,1)$. $\mathbf{R}^k$中的Borel可测集全体记为$\mathscr{B}^k$. $(\mathbf{R}^k,\mathscr{B}^k)$上概率测度$P$所对应的$k$元分布函数$F(\mathbf{x})=P\{\mathbf{y}:\mathbf{y}<\mathbf{x}\}$，$\mathbf{x}\in\mathbf{R}^k$. 我们来讨论$\mathbf{R}^k$中概率测度$P_n$弱收敛于概率测度$P$与它们对应的$k$元d.f. F_n,F的依分布收敛之间的关系.

定义 2.2 对$\mathbf{R}^k$上的点$\mathbf{x}$，若对任给$\varepsilon>0$，存在$\delta=\delta(\varepsilon,\mathbf{x})>0$，使当$\mathbf{x}-\delta\mathbf{e}<\mathbf{y}<\mathbf{x}+\delta\mathbf{e}$时，有$|F(\mathbf{x})-F(\mathbf{y})|<\varepsilon$，就称**函数$F$在点$\mathbf{x}$是连续的**. 若对任给$\varepsilon>0$，存在$\delta=\delta(\varepsilon,\mathbf{x})>0$，使当$\mathbf{x}\leqslant\mathbf{y}<\mathbf{x}+\delta\mathbf{e}$时，就有$|F(\mathbf{x})-F(\mathbf{y})|<\varepsilon$，则称**函数$F$在点$\mathbf{x}$是上连续的**，类似地可定义**下连续**.

由定义可见d.f. F在点$\mathbf{x}$是下连续的. 这样，d.f. F在点$\mathbf{x}$是连续的当且仅当F在点$\mathbf{x}$是上连续的. 由于d.f. $F(\mathbf{x})=P\{\mathbf{y}:\mathbf{y}<\mathbf{x}\}$是不减的，所以$F$在点$\mathbf{x}$是上连续的当且仅当

---

*) S的子集类$\mathscr{S}$称为π系，若对任两$A,B\in\mathscr{S}$，都有$AB\in\mathscr{S}$.

$$F(\mathbf{x}) = \inf_{\delta>0} F(\mathbf{x}+\delta\mathbf{e}) = \inf_{\delta>0} P\{\mathbf{y}:\mathbf{y}<\mathbf{x}+\delta\mathbf{e}\} = P\{\mathbf{y}:\mathbf{y}\leqslant\mathbf{x}\}.$$

由此即知，d.f. F 在点 $\mathbf{x}$ 是连续的当且仅当 $A_{\mathbf{x}}=\{\mathbf{y}:\mathbf{y}<\mathbf{x}\}$ 是 P **连续集**，即 $P\{\partial A_x\}=0$. 由此我们有

定理 2.1　$P_n\Rightarrow P$ 的充要条件是 $F_n \xrightarrow{d} F$.

证　由定理1.2知条件必要. 反之，假设d.f. $F_n \xrightarrow{d} F$，即在d.f. $F(\mathbf{x})$ 的每一连续点 $\mathbf{x}$ 上，$F_n(\mathbf{x})\to F(\mathbf{x})$. 记

$\mathscr{F}$ 为一切$[\mathbf{a},\mathbf{b})$，其中 $2k$ 个包含$[\mathbf{a},\mathbf{b})$的表面的 $k-1$ 维超平面之 P 测度为零.

我们来验证$\mathscr{F}$ 满足推论1.3的条件. 显然，$\mathscr{F}$ 关于有限交是封闭的. 又对任一 $x\in\mathbf{R}^k$ 及 $\varepsilon>0$，有$[\mathbf{a},\mathbf{b})\subset S(x,\varepsilon)$ 且 $P\{\partial[\mathbf{a},\mathbf{b})\}=0$，但对任一 $A\in\mathscr{F}$，$A=[\mathbf{a},\mathbf{b})$ 的每一顶点都是 F 的连续点，所以

$$P_n(A)=\sum \pm F_n(\mathbf{x}) \to \sum \pm F(\mathbf{x}) = P(A),$$

其中 $\sum \pm F(\mathbf{x}) = F(b_1,\cdots,b_k) - \sum F(b_1,\cdots,a_i,\cdots,b_k) + \cdots + (-1)^k F(a_1,\cdots,a_k)$. 由推论 1.3 就得 $P_n\Rightarrow P$.

从证明中可知 $\mathscr{F}$ 是一个收敛确定类，故也是确定类. 这样，在 k 维欧氏空间 $\mathbf{R}^k$ 中，概率测度弱收敛性与对应分布的弱收敛性是一致的.

2.3　$\mathbf{R}^\infty$

$\mathbf{R}^\infty$ 为一切实数列 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots)$. 令

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|},$$

它是 $\mathbf{R}^\infty$ 的一个距离. 点 $\mathbf{x}$ 的邻域取为

$$N_{k,\varepsilon}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y}:|x_i-y_i|<\varepsilon,\ i=1,2,\cdots,k\},$$

其中 k 为任给自然数. 由这样的邻域产生的拓扑，其中每一开集可表为形如下的集的可列并：

$$B_k\times\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^1\times\cdots,$$

其中 B_k 是 $\mathbf{R}^k$ 的开集. 关于这一拓扑，$\mathbf{R}^\infty$ 是可分完备的度量空间.

用 π_k 记 $\mathbf{R}^\infty$ 至 $\mathbf{R}^k$ 的自然投影，即 $\pi_k(\mathbf{x})=(x_1,\cdots,x_k)$. 可以验证它是连续的，因此也是可测的. 对 $\mathscr{B}^k$ 中任一Borel集 H，$\pi_k^{-1}H=H\times\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^1\times\cdots$ 是有限维基底的柱集，简称**有限维柱集**，也称**柱集**. 一切有限维柱集全体记为 $\mathscr{F}$，它是一个域，且由于 $N_{k,\varepsilon}(\mathbf{x})\in\mathscr{F}$，$\mathbf{R}^\infty$ 可分*)，所以 $\sigma(\mathscr{F})=\mathscr{B}^\infty$($\mathbf{R}^\infty$ 上

*)　度量空间(S,ρ)说是可分的，若 S 包含一可列稠密子集. 坐标为有理数的点的全体是 $\mathbf{R}^\infty$ 的一可列稠密集

一切 Borel 集组成的 σ 域). 由此可知, $\mathscr{F}$ 是一个确定类.

设 P 是 $(\mathbf{R}^\infty,\rho,\mathscr{B}^\infty)$ 上概率测度, P 在 $\mathbf{R}^m$ 上的局部化是指 $\mathbf{R}^m$ 上的概率测度 $P^{(m)}$: 对任一 $A\in\mathscr{B}^m$

$$P^{(m)}(A)=P\pi_m^{-1}(A)=P(A\times\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^1\times\cdots).$$

对度量可测空间 $(\mathbf{R}^\infty,\rho,\mathscr{B}^\infty)$ 上概率测度的弱收敛性, 我们有

定理 2.2 $(\mathbf{R}^\infty,\rho,\mathscr{B}^\infty)$ 上概率测度 $P_n\Rightarrow P$ 的充要条件是对每一自然数 m, $P_n^{(m)}\Rightarrow P^{(m)}$.

证 令 $\mathscr{U}_0$ 为 $\mathscr{F}$ 中一切 P 连续集. 我们来验证 $\mathscr{U}_0$ 满足推论 1.3 的条件. 显然(i) 被满足. 现验证(ii). 对任一 $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^\infty$, $\varepsilon>0$, 我们有 k_0 及 $\varepsilon'>0$ 使得 $N_{k_0,\varepsilon'}(\mathbf{x})\in\mathscr{U}_0$, 且 $\mathbf{x}\in N_{k_0,\varepsilon'}(\mathbf{x})\subset S(\mathbf{x},\varepsilon)$. 事实上, 对给定 ε, 有 k_0 使 $\sum\limits_{k>k_0}2^{-k}<\varepsilon/2$. 当 $\mathbf{y}\in N_{k_0,\varepsilon/2}(\mathbf{x})$ 时, $|x_i-y_i|<\varepsilon/2$, $i=1,\cdots,k_0$, 所以

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}<\sum_{k=1}^{k_0}\frac{1}{2^k}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

即 $\mathbf{y}\in S(\mathbf{x},\varepsilon)$, 得 $N_{k_0,\varepsilon/2}(\mathbf{x})\subset S(\mathbf{x},\varepsilon)$. 由此不难看出存在 $0<\varepsilon'<\varepsilon/2$ 使 $P\{\partial N_{k_0,\varepsilon'}(\mathbf{x})\}=0$. 得证(ii)成立. 故由推论 1.3 可得 $P_n\Rightarrow P$ 的充要条件是对任一 $A\in\mathscr{U}_0$, $P_n(A)\to P(A)$. 注意到 $\mathscr{U}_0=\bigcup\limits_m\mathscr{U}_0^{(m)}$, 这里 $\mathscr{U}_0^{(m)}$ 是 $\mathscr{U}_0$ 中的 m 维柱集全体. 这样, 对任一 $A\in\mathscr{U}_0$, $P_n(A)\to P(A)$ 的充要条件是对一切 m, $P_n^{(m)}\Rightarrow P^{(m)}$. 证毕.

这就是说, $\mathbf{R}^\infty$ 中概率测度的弱收敛问题可以归结为一切有限维分布的收敛问题.

2.4 $C[0,1]$

$C=C[0,1]$ 为区间 $[0,1]$ 上连续函数全体. 它对于一致距离 ρ:

$$\rho(x,y)=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-y(t)|$$

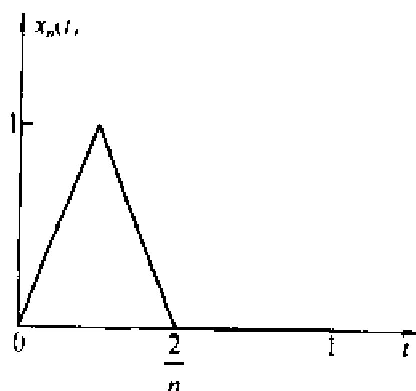
是可分、完备的.

对任给的 $t_1,t_2,\cdots,t_k\in[0,1]$, 记 $\pi_{t_1,\cdots,t_k}$ 是 C 到 $\mathbf{R}^k$ 中的**投影映射**

$$\pi_{t_1,\cdots,t_k}:\mathbf{x}\longrightarrow(x(t_1),\cdots,x(t_k)).$$

易见 $\pi_{t_1,\cdots,t_k}$ 是 C 到 $\mathbf{R}^k$ 中的连续映射. 此时对任一 k 维 Borel 集 $B\in\mathscr{B}^k$, $\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1}B\in\mathscr{C}$ (C 中 Borel 集类). 称 $\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1}B$ 为**有限维柱集**. 以 $\mathscr{F}$ 记一切有限维柱集全体. 注意到闭球 $\{\mathbf{y}:\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})\leqslant\varepsilon\}=\overline{S(\mathbf{x},\varepsilon)}$ 是有限维柱集 $\{\mathbf{y}:|\mathbf{x}(i/n)-\mathbf{y}(i/n)|\leqslant\varepsilon,\ i=1,\cdots,n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限, 且 C 可分, 所以 $\sigma(\mathscr{F})=\mathscr{C}$. 因此, $\mathscr{F}$ 是一个确定类.

但 $\mathscr{F}$ 不是收敛确定类. 事实上, 设 P 是概率集中在 $x(t)\equiv 0$ 的一个概率



测度，P_n 是概率集中在

$$x_n(t)=\begin{cases} nt, & 0\leqslant t\leqslant 1/n, \\ 2-nt, & 1/n\leqslant t\leqslant 2/n, \\ 0, & 2/n\leqslant t\leqslant 1 \end{cases}$$

的概率测度．此时对每一固定的 t，$x_n(t)\to 0(n\to\infty)$，但关于 t 不是一致地成立．对于开球 $A=S(0,1/2)$，

$$\partial A=\{x:\sup|x(t)|=1/2\},$$

$$P(\partial A)=0.$$

因为$\sup\limits_t|x_n(t)-0|=1$，故 $x_n\overline{\in} A$．由此 $P_n(A)=0\nrightarrow P(A)=1$，这就是说 P_n 不弱收敛于 P．但对于任一有限维柱集 A，若 $P(\partial A)=0$，就有 $P_n(A)\to P(A)$．事实上，若 $A=\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1}B, B\in\mathscr{B}^k$，当 $2/n\leqslant$ 非 0 的 $t_1,\cdots,t_k$ 时，就有 $P_n(A)=P(A)$．即得证 $\mathscr{F}$ 不是收敛确定类．

这就是说，在度量空间$(C,\mathscr{C})$中，概率测度的有限维收敛性不能推得概率测度的弱收敛性．这样就提出了一个问题：度量空间中，在什么条件下，概率测度的有限维分布收敛可以导致它的弱收敛．这一问题将在 §4 中给出回答．

§3 随机元序列的收敛性

设$\{X,X_n;n\geqslant 1\}$是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{A},P)$上取值于度量可测空间$(S,\rho,\mathscr{B})$的随机元序列．在本节中，我们来讨论随机元序列的依分布收敛及其与依概率收敛间的关系．

3.1 依分布收敛

我们已知随机元序列$\{X_n;n\geqslant 1\}$依分布收敛于随机元 X 就是它们对应的概率测度 $P_n=PX_n^{-1}$ 弱收敛于 $P_X=PX^{-1}$，所以由定理 1.2 即可写出下述定理．

定理 3.1 下述命题等价：

(i) $X_n\xrightarrow{d}X$；

(ii) 对每一闭集 $F\subset S$，$\limsup\limits_{n\to\infty}P\{X_n\in F\}\leqslant P\{X\in F\}$；

(iii) 对每一开集 $G\subset S$，$\liminf\limits_{n\to\infty}P\{X_n\in G\}\geqslant P\{X\in G\}$；

(iv) 对 X 的每一连续集 A，即当 $P\{X\in\partial A\}=0$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{X_n\in A\}=P\{X\in A\}.$$

定理 3.2 设 h 是度量空间$(S,\mathscr{B})$到度量空间$(S',\mathscr{B}')$的可测映射．记

h 的不连续点集为 D_h*). 那么若 S 上概率测度 $P_n \Rightarrow P$, 且 $P(D_h)=0$, 就有

$$P_n h^{-1} \Rightarrow P h^{-1}.$$

用随机元的术语来说: 若 $X_n \xrightarrow{d} X$, $P\{X \in D_h\}=0$, 则 $h(X_n) \xrightarrow{d} h(X)$.

证 我们来证对 S' 中任一闭集 F 有

$$\limsup_{n\to\infty} P_n h^{-1}(F) \leqslant P h^{-1}(F).$$

因为 $P_n \Rightarrow P$, 所以

$$\limsup_{n\to\infty} P_n(h^{-1}(F)) \leqslant \limsup_{n\to\infty} P_n(\overline{h^{-1}(F)}) \leqslant P(\overline{h^{-1}(F)}).$$

而 $\overline{h^{-1}(F)} \subset D_h \cup h^{-1}(F)$. 由假设 $P(D_h)=0$, 所以 $P(\overline{h^{-1}(F)})=P(h^{-1}(F))$. 这就得证 $P_n h^{-1} \Rightarrow P h^{-1}$.

定理 3.3 (i) 若对任一 $h \in C(S)$, $P_n h^{-1} \Rightarrow P h^{-1}$, 则 $P_n \Rightarrow P$.

(ii) 反之, 若 $P_n \Rightarrow P$, h 是有界实值可测函数, $P(D_h)=0$, 则

$$\int_S h \mathrm{d}P_n \to \int_S h \mathrm{d}P.$$

证 (i) 若对任一 $h \in C(S)$, 有 $P_n h^{-1} \Rightarrow P h^{-1}$, 那么对任一 $f \in C(\mathbf{R}^1)$ 有

$$\int_{\mathbf{R}^1} f(x) P_n h^{-1}(\mathrm{d}x) \to \int_{\mathbf{R}^1} f(x) P h^{-1}(\mathrm{d}x).$$

由积分变换得

$$\int_S f(h(y)) P_n(\mathrm{d}y) \to \int_S f(h(y)) P(\mathrm{d}y).$$

对于给定的 h, 有实数 M, 使 $|h(y)| \leqslant M$. 现在令

$$f(t)=\begin{cases} -M, & \text{当 } t<-M, \\ t, & \text{当 } |t| \leqslant M, \\ M, & \text{当 } t>M. \end{cases}$$

这时 $f(h(y))=h(y)$. 得证 $\int_S h(y) dP_n \to \int_S h(y) dP$, 即 $P_n \Rightarrow P$.

(ii) 此时 D_h 可测, 由定理 3.2 即得结论.

3.2 依概率收敛

定义 3.1 称取值于度量可测空间 $(S, \rho, \mathscr{B})$ 的随机元序列 $\{X_n; n \geqslant 1\}$ **依概率收敛**于随机元 X, 若对任一 $\varepsilon>0$

$$P\{\rho(X_n, X) \geqslant \varepsilon\} \to 0.$$

记作 $X_n \xrightarrow{P} X$.

与实值 r.v. 一样, 我们有

*) 不难证明 $D_h \in \mathscr{B}$.

定理 3.4　当 X 是 S 中的常值元 a 时，$X_n \xrightarrow{P} a$ 当且仅当 $X_n \xrightarrow{d} a$.

证　条件必要　对 S 中任一闭集 F，由于

$$(X_n \in F) \subset (X_n \in F,\ a \in F) \cup (X_n \in F, a \notin F),$$

我们有

$$P\{X_n \in F\} \leqslant P\{a \in F\} + P\{\rho(a, X_n) \geqslant \rho(a, F) > 0\}.$$

因为 $X_n \xrightarrow{P} a$，上式右边第二项趋于 0，由此可得

$$\limsup_{n\to\infty} P\{X_n \in F\} \leqslant P\{a \in F\},$$

所以 $X_n \xrightarrow{d} a$.

条件充分　记 $A = \{y: \rho(y, a) \geqslant \varepsilon\}$，$P_a$ 是概率集中在 a 的概率测度，则 A 是 P_a 连续集. 由于 $X_n \xrightarrow{d} a$，所以

$$P\{\rho(X_n, a) \geqslant \varepsilon\} = P_n(A) \to P_a(A) = 0,$$

得证 $X_n \xrightarrow{P} a$.

设 $\{X_n\}$，$\{Y_n\}$ 是可分度量空间 $(S, \rho, \mathscr{B})$ 的两列随机元序列. 不难证明

引理 3.1　设 S 可分，则 $\rho(X_n, Y_n)$ 是 $S \times S$ 到 $\mathbf{R}$ 上的一个连续映射. 这就是说 $\rho(X_n, Y_n)$ 是一个实值 r.v.

定理 3.5　若 $X_n \xrightarrow{d} a$ 且 $\rho(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} 0$，则

$$Y_n \xrightarrow{d} X.$$

证　设 F 是 S 中的闭子集. 记 $F_\varepsilon = \{x: \rho(x, F) \leqslant \varepsilon\}$，$F_\varepsilon$ 也是 S 的闭子集. 我们有

$$P\{Y_n \in F\} \leqslant P\{\rho(X_n, Y_n) \geqslant \varepsilon\} + P\{X_n \in F_\varepsilon\}.$$

由假设及定理 3.1，我们推得

$$\limsup_{n\to\infty} P\{Y_n \in F\} \leqslant \limsup_{n\to\infty} P\{X_n \in F_\varepsilon\} \leqslant P\{X \in F_\varepsilon\},$$

当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时，$F_\varepsilon \downarrow F$，这就得证 $Y_n \xrightarrow{d} X$.

注　定理 3.5 是第一章定理 5.5(Slutsky 引理) 在度量空间情形的一个推广.

定理 3.6　设

$$X_{nk} \xrightarrow{d} X_k (n \to \infty), \quad X_k \xrightarrow{d} X\ (k \to \infty).$$

若对任一 $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\{\rho(X_{nk}, Y_n) \geqslant \varepsilon\} = 0,$$

则

$$Y_n \xrightarrow{d} X.$$

证 对任给的 S 中的闭集 F，记 $F_\varepsilon = \{x : \rho(x,F) \leqslant \varepsilon\}$. 我们有

$$P\{Y_n \in F\} \leqslant P\{\rho(X_{nk},Y_n) \geqslant \varepsilon\} + P\{X_{nk} \in F_\varepsilon\}.$$

由假设可得

$$\limsup_{n\to\infty} P\{Y_n \in F\} \leqslant P\{X_k \in F_\varepsilon\}.$$

再由 $X_k \xrightarrow{d} X$ 及 $F_\varepsilon \downarrow F(\varepsilon \to 0)$ 就得

$$\limsup_{n\to\infty} P\{Y_n \in F\} \leqslant P\{X \in F\}.$$

即得证 $Y_n \xrightarrow{d} X$.

定理 3.7 若 $X_n \xrightarrow{P} X$，则对 X 的每一连续集 A

$$P\{(X_n \in A) \Delta (X \in A)\} \to 0.$$

证 对任给 $\varepsilon > 0$，我们有

$$P\{X_n \in A, X \overline{\in} A\} \leqslant P\{\rho(X_n,X) \geqslant \varepsilon\} + P\{\rho(X,A) < \varepsilon, X \overline{\in} A\},$$

$$P\{X_n \overline{\in} A, X \in A\} \leqslant P\{\rho(X_n,X) \geqslant \varepsilon\} + P\{\rho(X,A^c) < \varepsilon, X \in A\}.$$

由 $X_n \xrightarrow{P} X$，可以推得

$$\limsup_{n\to\infty} P\{(X_n \in A) \Delta (X \in A)\}$$

$$\leqslant P\{\rho(X,A) < \varepsilon, X \overline{\in} A\} + P\{\rho(X,A^c) < \varepsilon, X \in A\}.$$

当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时，事件 $\{\rho(X,A) < \varepsilon, X \overline{\in} A\} \cup \{\rho(X,A^c) < \varepsilon, X \in A\} \downarrow (X \in \partial A)$. 得证定理的结论.

推论 3.3 若 $X_n \xrightarrow{P} X$，则 $X_n \xrightarrow{d} X$.

下面我们对度量空间 (S,ρ) 上的全体概率测度族考察上述诸收敛性相应的度量. 众所周知，度量空间 (S,ρ) 上概率测度 P_n 弱收敛于概率测度 P，相当于对概率测度间的 Levy-Prohorov 距离：

$$w(P_1,P_2) = \inf\{\delta : P_1(A) \leqslant P_2(A^\delta) + \delta,\ P_2(A) \leqslant P_1(A^\delta) + \delta,$$
$$\text{对所有闭集 } A \in \mathscr{B}(S)\},$$

其中 $A^\delta = \{x : \rho(x,y) < \delta$ 对所有 $y \in A$ 成立$\}$，成立 $w(P_n,P) \to 0$.

我们也熟知对取值于度量空间 (S,ρ) 上的随机元 X_n, X，由 $X_n \to X$ (a.s.) 可推出 $X_n \xrightarrow{P} X$，又由 $X_n \xrightarrow{P} X$ 可推出 $X_n \xrightarrow{d} X$ 或 $P_{X_n} \Rightarrow P_X$. Skorohod 的下述结果指出：在某种意义下(即在适当的参考框架 —— 概率空间上)，其逆成立.

定理 3.8 设 (S,ρ) 是可分完备的度量空间，$\{P_n, P; n \geqslant 1\}$ 是 $(S,\mathscr{B}(S))$

上的概率测度，$P_n \Rightarrow P(n \to \infty)$，那么存在适当的概率空间$(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{A}},\tilde{P})$，在其上可构造 S 值随机元列$\{X_n,X;n \geqslant 1\}$使得

(i) X_n 的概率分布等于 $P_n(n=1,2,\cdots)$，X 的概率分布等于 P；

(ii) $X_n \to X$ a.s.

定理的证明从略，请参见 Ikeda 和 Watanabe(1981) 定理 2.7.

这样除 L_p 收敛外，a.s. 收敛、依概率收敛及依分布收敛在"本质上"是相同的.

对应 L_p 收敛，它相应的概率测度间距离是怎样的呢？通常的 L_p 距离被定义为：

$$\|X_1 - X_2\|_p = \{E[\rho(X_1,X_2)^p]\}^{1/p}.$$

假设 X_i 有概率分布 P_i，$i=1,2$，且(X_1,X_2)有联合概率分布 P(也称 P 是 P_1 和 P_2 的耦合(coupling))，易见 P 不是唯一的. 这样对应于 L_p 收敛的距离定义为：

$$W_p(P_1,P_2) = \inf_P \left\{\int \rho(x_1,x_2)^p P(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2)\right\}^{1/p},$$

称 $W_p(P_1,P_2)$ 为**最小 L_p 距离**.

考察 w 与 W_1，W_2 及全变差距离

$$\|P_1 - P_2\|_{\mathrm{Var}} = 2\sup_A |P_1(A) - P_2(A)|$$

之间的关系. 设离散距离 d_0：

$$d_0(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x = y, \\ 0, & \text{当 } x \neq y. \end{cases}$$

全变差度量是离散距离 d_0 的最小 L_1 距离：

$$V(P_1,P_2) \overset{\mathrm{def}}{=} \inf_P \int d_0(x_1,x_2)P(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2) = \frac{1}{2}\|P_1 - P_2\|_{\mathrm{Var}}$$
$$= \sup_A |P_1(A) - P_2(A)|.$$

W_p 通常较强于 w，精确地讲，我们有

定理 3.9 $W_p(P_n,P) \to 0$ 等价于下面两条件成立：

(i) $w(P_n,P) \to 0$；

(ii) 对某 $x_0 \in S$，$\int \rho(x,x_0)^p P_n(\mathrm{d}x) \to \int \rho(x,x_0)^p P(\mathrm{d}x)$.

特别地，当 ρ 有界时，w 与 W_p 等价.

通常 $W_p(P_1,P_2)$ 的精确表示式是难以求得的. 对 W_1 有人给出了一个对偶性表示式(参见 Chen, M.F. (1992)，定理 5.41)；对几个特殊情形有如下结果：设 P_k 是实直线上的概率测度，它对应的分布函数为 $F_k(x)$，$k=1,2$. 那么

$$W(P_1,P_2)=\int_{-\infty}^{\infty}|F_1(x)-F_2(x)|\mathrm{d}x.$$

又设 P_k 是($\mathbf{R}^d,\mathscr{B}^d$) ($d\geqslant 1$) 上 d 元正态分布，它的均值向量为 $\mathbf{m}_k$，协方阵为 $\boldsymbol{M}_k$，$k=1,2$. 那么

$$W_2(P_1,P_2)=\left\{|\mathbf{m}_1-\mathbf{m}_2|^2+\mathrm{tr}\boldsymbol{M}_1+\mathrm{tr}\boldsymbol{M}_2-2\mathrm{tr}(\sqrt{\boldsymbol{M}_1}\boldsymbol{M}_2\sqrt{\boldsymbol{M}_1})^{1/2}\right\}^{1/2},$$

其中 tr$\boldsymbol{M}$ 为方阵 $\boldsymbol{M}$ 的迹. 关于 W_p 的另一些讨论与上述某些结果的证明可参见 Chen,M. F. (1992) § 5.1.

§ 4　胎紧性和 Prohorov 定理

4.1　胎紧性(tightness)和相对紧性

定义 4.1　度量空间 S 上概率测度族 $\Pi=\{P_\alpha;\alpha\in T\}$ 称为一致胎紧的(uniformly tight)，若对任给的 $\varepsilon>0$，有紧集 K，使对一切 $P_\alpha\in\Pi$，有 $P_\alpha(K)>1-\varepsilon$.

显然，度量空间 S 上的任一概率测度族未必是一致胎紧的. 即使单一的一个概率测度 P 也未必是胎紧的. 事实上，S 上概率测度 P 是胎紧的当且仅当 P 有一个 σ 紧的支撑，即有支撑 A，它可表成可列个紧集的并. 由此，特别当度量空间 S 是 σ 紧时，S 上任一概率测度 P 是胎紧的. 对于单个概率测度，我们还有

定理 4.1　可分完备度量空间 S 上的概率测度 P 是胎紧的.

证　由于 S 可分，对每一 n，存在开的 $1/n$ 球列 $\{A_{nk}\}$ 覆盖 S. 故对任给 $\varepsilon>0$，有 k_n 使得

$$P\left\{\bigcup_{k=1}^{k_n}A_{nk}\right\}>1-\varepsilon/2^n,$$

而 $B=\bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\leqslant k_n}A_{nk}$ 是全有界集，且 $P(B)>1-\varepsilon$. 由 S 的完备性得全有界集 B 的闭包 $\bar{B}\overset{\text{def}}{=}K$ 是紧集. 所以 $P(K)\geqslant P(B)>1-\varepsilon$. 即 P 是胎紧的.

我们来看度量空间上概率测度弱收敛的另一特性.

引理 4.1　度量空间 S 上的概率测度 $P_n\Rightarrow P$ 当且仅当 $\{P_n\}$ 的任一子列 $\{P_{n'}\}$ 含有弱收敛于 P 的子列 $\{P_{n''}\}$.

此命题请读者自己证明之. 由此，我们可引出如下概念.

定义 4.2　度量空间 $(S,\mathscr{B})$ 上的概率测度族 Π 说是弱相对紧的(Weakly relatively compact)，若 Π 的任一元素序列 $\{P_n\}$ 有弱收敛的子列，即有 $\{P_{n'}\}\subset\{P_n\}$ 及 $(S,\mathscr{B})$ 上的概率测度 Q，使 $P_{n'}\Rightarrow Q$.

定理 4.2　对 $(C,\mathscr{C})$ 中概率测度列 $\{P_n\}$，$P_n\Rightarrow P$ 的充要条件是 $\{P_n\}$ 是弱

相对紧的，且对任何 $t_1,\cdots,t_k\in[0,1]$，$P_n\pi_{t_1,\cdots,t_k}\Rightarrow P\pi_{t_1,\cdots,t_k}$.

证　条件必要是显然的. 现证条件充分. 由于 $\{P_n\}$ 是弱相对紧的，故 $\{P_n\}$ 的任一子列 $\{P_{n'}\}$ 有弱收敛的子列 $\{P_{n''}\}$，即有概率测度 Q 使得 $P_{n''}\Rightarrow Q$. 所以对任给 $t_1,\cdots,t_k\in[0,1]$ 有

$$P_{n''}\pi_{t_1,\cdots,t_k}\Rightarrow Q\pi_{t_1,\cdots,t_k}.$$

因此 $Q\pi_{t_1,\cdots,t_k}=P\pi_{t_1,\cdots,t_k}$. 由 2.4 的讨论知空间 C 中的有限维柱集类是确定类，由此 $Q=P$. 这就证明了 $\{P_n\}$ 的任一子列 $\{P_{n'}\}$ 有一弱收敛于 P 的子列 $\{P_{n''}\}$，按引理 4.1 得证 $P_n\Rightarrow P$. 证毕.

这一定理初步回答了在 §2 中提出的问题. 在空间 $C[0,1]$ 上，当概率测度列 $\{P_n\}$ 弱相对紧时，概率测度有限维分布的收敛性可以导出它的弱收敛性. 但是弱相对紧性的验证是不容易的. 下一定理启示我们概率测度族 $\Pi=\{P_\alpha;\alpha\in T\}$ 的弱相对紧性与一致胎紧性有着密切的联系.

定理 4.3　$(\mathbf{R}^1,\mathscr{B}^1)$ 上概率测度族 Π 是弱相对紧的充要条件是 Π 是一致胎紧的.

证　条件充分　设 $\{P_n\}\subset\Pi$，P_n 对应的 d.f. 记为 $F_n(x)$. 由 Helly 定理，存在子列 $\{F_{n'}(x)\}$ 及有界不减的左连续函数 $F(x)$，使 $\{F_{n'}\}$ 淡收敛于 F. 设 $F(x)$ 在 $(\mathbf{R}^1,\mathscr{B}^1)$ 上所对应的测度为 μ，易见此时 $\mu(\mathbf{R}^1)\leqslant 1$. 由假设对任给 $\varepsilon>0$，存在实数 a,b，使对一切 P_n，有 $P_n\{[a,b]\}>1-\varepsilon$. 此时可取 a,b 为 $F(x)$ 的连续点. 由此可得 $\mu\{[a,b]\}\geqslant 1-\varepsilon$. 由 ε 的任意性推得 $\mu(\mathbf{R}^1)=1$，这就得证 $P_{n'}\Rightarrow\mu$.

条件必要　用反证法. 若不然，有 $\varepsilon_0>0$，使对每一 n 有 $P_n\in\Pi$，使得 $P_n\{[-n,n]\}\leqslant 1-\varepsilon_0$. 由假设 Π 是弱相对紧的，所以 $\{P_n\}$ 有子列 $\{P_{n'}\}$ 及 $\mathbf{R}^1$ 上概率测度 Q 使得 $P_{n'}\Rightarrow Q$. 这样对任一实数 $x>0$，

$$Q\{(-x,x)\}\leqslant\liminf_{n'\to\infty}P_{n'}\{(-x,x)\}\leqslant\liminf_{n'\to\infty}P_{n'}\{[-n',n']\}\leqslant 1-\varepsilon_0,$$

这与 Q 是概率测度矛盾. 证毕.

4.2　Prohorov 定理

定理 4.4(正定理)　若度量空间 S 上的概率测度族 Π 是一致胎紧的，则 Π 是弱相对紧的.

定理 4.5(逆定理)　设 S 是可分完备的度量空间，S 上的概率测度族 Π 是弱相对紧的，则 Π 是一致胎紧的.

正定理的证明　对 $S=\mathbf{R}^k,\mathbf{R}^\infty$，$\sigma$ 紧及一般情形依次给出证明，其中后一情形的证明都要用到前一情形已被证明的结论.

1°　$S=\mathbf{R}^k$ 时与定理 4.3 对 $\mathbf{R}^1$ 的证明相仿. 从略.

2° $S=\mathbf{R}^{\infty}$ 情形

引理 4.2 若 Π 是 S 上一致胎紧的概率测度族，h 是度量空间 S 到度量空间 S' 上的连续映射，则 $\Pi'=\{Ph^{-1};P\in\Pi\}$ 是 S' 上一致胎紧的概率测度族.

证 对任一 $\varepsilon>0$，有 S 的紧集 K，使对任一 $P\in\Pi$，$P(K)>1-\varepsilon$. 记 $K'=hK$，则 K' 是 S' 的紧集，且 $h^{-1}K'\supset K$，所以

$$Ph^{-1}(K')=P(h^{-1}K')\geqslant P(K)>1-\varepsilon.$$

现设 Π 是 $(\mathbf{R}^{\infty},\mathscr{B}^{\infty})$ 上一致胎紧的概率测度族. 由引理 4.2，对每一 k，$\{P\pi_k^{-1};P\in\Pi\}$ 是 $(\mathbf{R}^k,\mathscr{B}^k)$ 上一致胎紧的概率测度族. 由 1° 对 Π 中任一给定的 $\{P_n\}$，有子列 $\{P_{n'}\}$ 使 $\{P_{n'}\pi_k^{-1}\}$ 在 $(\mathbf{R}^k,\mathscr{B}^k)$ 中弱收敛于某概率测度 μ_k. 由对角线法则，可取得 $\{P_n\}$ 的一个子列 $\{P_{n_i}\}$，使对所有 k 有 $P_{n_i}\pi_k^{-1}\Rightarrow\mu_k(i\to\infty)$. 显然，此时 $\{\mu_k\}$ 满足 Kolmogorov 定理的相容性条件，所以在 $(\mathbf{R}^{\infty},\mathscr{B}^{\infty})$ 上存在概率测度 Q，使得 $Q\pi_k^{-1}=\mu_k$ 对一切 k 成立. 所以有 $P_{n_i}\pi_k^{-1}\Rightarrow Q\pi_k^{-1}$. 利用推论 3.1 即得 $P_{n_i}\Rightarrow Q$，这就证明了 Π 是弱相对紧的.

余下部分的证明需要进一步的引理.

设 S_0 是度量空间 S 的一个 Borel 子集，即 $S_0\in\mathscr{B}$. 则 S_0 在相对拓扑下也是一个度量空间. 此时

$$\mathscr{B}_0=\{A:A\subset S_0,A\in\mathscr{B}\}\subset\mathscr{B}.$$

若 P 是 $(S,\mathscr{B})$ 上的概率测度且 $P(S_0)=1$. 用 P^r 表示从 $\mathscr{B}$ 限于 $\mathscr{B}_0$ 时所得的 $(S_0,\mathscr{B}_0)$ 上的概率测度. 反过来，若 P 为 $(S_0,\mathscr{B}_0)$ 上的概率测度，用 P^e 记 P 扩张于 $(S,\mathscr{B})$ 上满足 $P^e(A)=P(A\cap S_0)$ 的概率测度. 此时 $P^e(S_0)=1$.

若 P 是 $(S,\mathscr{B})$ 上的概率测度，且 $P(S_0)=1$，则 $(P^r)^e=P$；反之，若 P 是 $(S_0,\mathscr{B}_0)$ 上的概率测度，则 $(P^e)^r=P$.

在引理 4.1 及定理 3.2 中，令 h 是 S_0 到 S 的嵌入恒等映射，就可写出

引理 4.3 (i) 若 Π 是 $(S_0,\mathscr{B}_0)$ 中一致胎紧的概率测度族，则 $\Pi^e=\{P^e;P\in\Pi\}$ 是 $(S,\mathscr{B})$ 中一致胎紧的概率测度族.

(ii) 若在 $(S_0,\mathscr{B}_0)$ 中 $P_n\Rightarrow P$，则在 $(S,\mathscr{B})$ 中 $P_n^e\Rightarrow P^e$.

引理 4.4 若在 $(S,\mathscr{B})$ 中 $P_n\Rightarrow P$，且 $P_n(S_0)=P(S_0)=1$，则在 $(S_0,\mathscr{B}_0)$ 中 $P_n^r\Rightarrow P^r$.

证 S_0 中任一开集 $G_0=G\cap S_0$，其中 G 为 S 的开子集. 因为 $P_n^r(G_0)=P_n(G)$，$P^r(G_0)=P(G)$，所以从 $P_n\Rightarrow P$ 有

$$\liminf_{n\to\infty}P_n^r(G_0)=\liminf_{n\to\infty}P_n(G)\geqslant P(G)=P^r(G_0).$$

得证 $P_n^r\Rightarrow P^r$.

3° σ 紧情形

若S是σ紧的，则S可分，因此可同胚地嵌入于$\mathbf{R}^\infty$中(Uryson定理)．又因S是σ紧的，在同胚映射下，它的像也是σ紧的，且是$\mathbf{R}^\infty$的一个Borel子集．由定理3.2在同胚映射下弱收敛性不变．因此Π的弱相对紧性仍保持．又紧集在同胚映射下仍是紧的，故Π的一致胎紧性也保持，所以可用S在$\mathbf{R}^\infty$中同胚的像代替S.

设S是$\mathbf{R}^\infty$的一个Borel子集．若Π是$(S,\mathscr{B})$中一致胎紧的概率测度族，由引理4.3得Π^r是$(\mathbf{R}^\infty,\mathscr{B}^\infty)$中一致胎紧的概率测度族．所以由2°知$\Pi^r$是弱相对紧的．即对$\Pi$中任一列$\{P_n\}$，其对应的$\{P_n^r\}$有子列$\{P_{n'}^r\}$弱收敛于$(\mathbf{R}^\infty,\mathscr{B}^\infty)$中某一概率测度$Q$．因为$\Pi$是一致胎紧的，对任给$\varepsilon>0$，有$S$的紧子集$K$，使对每一$P\in\Pi$有$P(K)>1-\varepsilon$．所以对一切$n'$有

$$P_{n'}^r(K)=P_{n'}(K\cap S)=P_n(K)>1-\varepsilon.$$

于是$Q(S)\geqslant Q(K)\geqslant\limsup\limits_{n\to\infty}P_n(K)\geqslant 1-\varepsilon$，所以$S$也是$Q$的支撑．因此由引理4.4得$(P_{n'}^r)^r\Rightarrow Q^r$，即

$$P_{n'}\Rightarrow Q^r.$$

这就证明了Π是弱相对紧的.

4° 一般情形

设S是度量空间，Π是S上一致胎紧的概率测度族．对每一$i\geqslant 1$有S的紧子集K_i，使对每一$P\in\Pi$，有$P(K_i)>1-1/i$．记$S_0=\bigcup\limits_i K_i$，那么S_0是Π的任一概率测度P的支撑，即$P(S_0)=1$对每一$P\in\Pi$成立，且$\Pi^r=\{P^r;P\in\Pi\}$是$(S_0,\mathscr{B}_0)$中一致胎紧的概率测度族．由于S_0是σ紧的，由已证的3°知Π^r是弱相对紧的，即对Π中任一列$\{P_n\}$，对应的$\{P_n^r\}$有一弱收敛的子列$\{P_{n'}^r\}$，在$(S_0,\mathscr{B}_0)$中，$P_{n'}^r\Rightarrow Q$．由引理4.3(ii)可得$(P_{n'}^r)^r\Rightarrow Q^r$，即$P_{n'}\Rightarrow Q^r$，这就证明了$\Pi$是弱相对紧的．正定理证毕.

逆定理的证明

当Π仅由一个概率测度组成时，由定理4.1即得．假设对任给$\varepsilon>0,\delta>0$，有δ球的有限集$A_1,\cdots,A_n$使对每一$P\in\Pi$，有$P\left\{\bigcup\limits_{i=1}^n A_i\right\}>1-\varepsilon$，则$\Pi$必是一致胎紧的．事实上，此时对任给的$\varepsilon>0$和每一$k$，有有限个$1/k$球$A_{k1},\cdots,A_{kn_k}$使对每一$P\in\Pi$，有

$$P\left\{\bigcup_{i=1}^{n_k}A_{ki}\right\}>1-\varepsilon/2^k.$$

记K为全有界集$\bigcap\limits_{k=1}^\infty\bigcup\limits_{i=1}^{n_k}A_{ki}$的闭包，那么$P(K)>1-\varepsilon$．又因$S$是完备的，故全有界集的闭包$K$是紧的．这就证明了$\Pi$是一致胎紧的.

现在只需证明对于弱相对紧的Π必有上述假设成立.若不然,有$\varepsilon_0>0$,$\delta_0>0$,对δ_0球的任何有限集$A_1,\cdots,A_n$存在$P\in\Pi$,使$P\left\{\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right\}\leqslant 1-\varepsilon_0$.由于$S$可分,$S$可以表成$\delta$开球列$A_1,A_2,\cdots$的并.记$B_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$.由上可知有$\Pi$中$P_n$使得$P_n(B_n)\leqslant 1-\varepsilon_0$.因为$\Pi$是弱相对紧的,所以$\{P_n\}$中有子列$\{P_{n'}\}$弱收敛于某极限$P$.又因$B_m$是开集,对每一固定的$m$有

$$P(B_m)\leqslant\liminf_{n'\to\infty}P_{n'}(B_m).$$

但当$n'>m$时,$B_m\subset B_{n'}$,故得

$$P(B_m)\leqslant\liminf_{n'\to\infty}P_{n'}(B_{n'})\leqslant 1-\varepsilon_0.$$

而$B_m\uparrow S$,所以推得$P(S)\leqslant 1-\varepsilon_0$,矛盾.证毕.

§5 $C[0,1]$中概率测度弱收敛,Donsker 定理

5.1 $C[0,1]$中概率测度弱收敛

由于空间$C=C[0,1]$是可分完备的,所以由Prohorov定理及定理4.2即可写出.

定理 5.1 设$\{P,P_n;n\geqslant 1\}$是$(C,\mathscr{C})$上的概率测度列,那么$P_n\Rightarrow P$的充要条件是对任何正整数k及$t_1,\cdots,t_k\in[0,1]$,有$P_n\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1}\Rightarrow P\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1}$,且$\{P_n\}$是一致胎紧的.

这样,验证C上概率测度$\{P_n\}$的一致胎紧性就成为C上概率测度是否弱收敛的关键.这里我们给出一个充要条件,并在此基础上给出一个十分有用的充分条件.

空间C的元$x=x(t)$的连续模定义为

$$w_x(\delta)=\sup_{|s-t|<\delta}|x(s)-x(t)|\qquad(0<\delta<1),\tag{5.1}$$

也记作$w(x,\delta)$.

定理 5.2 $(C,\mathscr{C})$上概率测度列$\{P_n\}$是一致胎紧的充要条件是:

(i) 对任给$\eta>0$,有$a>0$使对每一n

$$P_n\{x:|x(0)|>a\}\leqslant\eta.\tag{5.2}$$

(ii) 对任给$\varepsilon>0$,$\eta>0$有$\delta(0<\delta<1)$和正整数n_0,当$n\geqslant n_0$时

$$P_n\{x:w_x(\delta)\geqslant\varepsilon\}\leqslant\eta.\tag{5.3}$$

证 条件必要 设$\{P_n\}$是一致胎紧的,即对任给$\eta>0$,有紧集$K\subset C$,使对每一n有$P_n(K)>1-\eta$.由 Arzela-Ascoli 定理知对充分大的a有

$$K\subset\{x:|x(0)|\leqslant a\},$$

且对任给的 $\varepsilon > 0$，有充分小的 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使

$$K \subset \{x: w_x(\delta) < \varepsilon\}.$$

由此即得(i)和(ii)(取 $n_0 = 1$)成立.

条件充分　由定理4.1知$(C,\mathscr{C})$上单一概率测度P_i是胎紧的，所以不妨设(ii)中的 $n_0 = 1$. 选 a 充分大，记 $A = \{x: |x(0)| \leqslant a\}$，对每一 n 有

$$P_n(A) \geqslant 1 - \eta/2.$$

由(ii)可选 $\delta_k > 0$，记 $A_k = \{x: w_x(\delta_k) < 1/k\}$，对每一 n 有

$$P_n(A_k) \geqslant 1 - \eta/2^{k+1}.$$

记 $A \cap (\bigcap_k A_k)$ 的闭包为 K，则 $P_n(K) \geqslant 1 - \eta$，且由 Arzela Ascoli 定理知 K 为 C 中紧集. 因此$\{P_n\}$是一致胎紧的. 证毕.

把定理5.2稍作改变就可给出如下的一致胎紧性的充分条件.

定理 5.3　若下两条件被满足，则$\{P_n\}$是一致胎紧的.

(i) 对任给 $\eta > 0$，有 a 使对每一 n

$$P_n\{x: |x(0)| > a\} \leqslant \eta; \tag{5.4}$$

(ii) 对任给 $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$，有 $\delta = \delta(\varepsilon,\eta)$ $(0 < \delta < 1)$ 和正整数 $n_0 = n_0(\varepsilon,\eta)$，使对每一 t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$，当 $n \geqslant n_0$ 时有

$$P_n\{x: \sup_{t \leqslant s \leqslant t+\delta} |x(s) - x(t)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \delta\eta. \tag{5.5}$$

证　只需验证定理5.2的(ii)被满足. 对取定的 $\delta < 1$，记

$$A_t(\varepsilon) = \{x: \sup_{t \leqslant s \leqslant t+\delta} |x(s) - x(t)| \geqslant \varepsilon\}.$$

区间$[0,1]$中的实数 s,t 各在形如$[i\delta,(i+1)\delta]$的某区间中. 若 $|s - t| < \delta$，则 s,t 所在区间相同或相邻，所以

$$P_n\{x: w_x(\delta) \geqslant 3\delta\} \leqslant P_n\Big\{\bigcup_{i \leqslant \delta^{-1}} A_{i\delta}(\varepsilon)\Big\} \leqslant (1 + [\delta^{-1}])\delta\eta < 2\eta.$$

这就得证定理5.2的(ii)被满足.

5.2　随机元与部分和过程

称概率空间$(\Omega, \mathscr{A}, P)$到$(C,\mathscr{C})$的可测映射

$$X: \omega \to X(\omega) \in C$$

为C空间的随机元或随机函数. 此时对每一 $\omega \in \Omega$，$X(\omega) = X(t,\omega)$ 是C的元，即是区间$[0,1]$上的一个连续函数；对每一 $t \in [0,1]$，$X(t,\omega)$ 作为 ω 的函数是怎样的呢？我们有

引理 5.1　Ω 到 C 的映射 X 是 C 值随机元当且仅当对每一 t，$X(t)$ 是一个实值 r.v.

证　条件必要　记 $A = \{x: x \in C,\ x(t) \leqslant a\}$. 显然 $A \in \mathscr{C}$. 若 X 是 C

的随机元，即 $X^{-1}\mathscr{C}\subset\mathscr{A}$，就有 $X^{-1}A=\{\omega:X(t,\omega)\leqslant a\}\in\mathscr{A}$，即对每一 t，$X(t)$ 是实 r.v.

条件充分　若对每一 t，$X(t)$ 是 r.v.，记 B 是 C 中以 $y=y(t)$ 为中心，δ 为半径的闭球，那么

$$X^{-1}B=\{\omega:X(\omega)\in B\}=\bigcap_r\{\omega:|y(r)-X(r,\omega)|\leqslant\delta\}$$
$$=\bigcap_r\{\omega:y(r)-\delta\leqslant X(r,\omega)\leqslant y(r)+\delta\}\in\mathscr{A},$$

其中 $\bigcap_r$ 是对 $[0,1]$ 中全体有理数 r 来取的. 由于 C 可分，闭球族 $\{B_\delta\}$ 是 $\mathscr{C}$ 的拓扑基，故得 $X^{-1}\mathscr{C}\subset\mathscr{A}$，即 X 是 C 的随机元. 证毕.

C 的一个随机元列 $\{W_n\}$ 说是一致胎紧的，若它对应的分布列 $\{P_n\}$ 是一致胎紧的. 现在容易把 C 上概率测度列一致胎紧性的结论转换成关于 C 上随机元列一致胎紧性的结论. 然后利用它来讨论部分和过程的一致胎紧性.

定理 5.2′　C 的随机元序列 $\{W_n\}$ 是一致胎紧的充要条件是 $\{W_n(0)\}$ 是一致胎紧的，且对任一 $\varepsilon>0$，$\eta>0$ 有 $\delta=\delta(\varepsilon,\eta)$ $(0<\delta<1)$ 及正整数 $n_0=n_0(\varepsilon,\eta)$，使当 $n\geqslant n_0$ 时有

$$P\{w(W_n,\delta)\geqslant\varepsilon\}\leqslant\eta. \tag{5.6}$$

定理 5.3′　对 C 的随机元序列 $\{W_n\}$，若 $\{W_n(0)\}$ 是一致胎紧的，且对任一 $\varepsilon>0$，$\eta>0$ 有 $\delta=\delta(\varepsilon,\eta)$ $(0<\delta<1)$ 及正整数 $n_0=n_0(\varepsilon,\eta)$，使对每一 $t(0\leqslant t\leqslant 1)$，当 $n\geqslant n_0$ 时

$$P\{\sup_{t\leqslant s\leqslant t+\delta}|W_n(s)-W_n(t)|\geqslant\varepsilon\}<\delta\eta, \tag{5.7}$$

那么 $\{W_n\}$ 是一致胎紧的.

设 $\{X_n\}$ 是 r.v. 序列，记 $S_0=0$，$S_n=\sum_{k=1}^n X_k$. 由 r.v. 列 $\{X_n\}$ 的部分和 $\{S_n\}$ 可构作 C 上随机元列 $\{W_n\}$ 如下：

$$W_n(t,\omega)=\begin{cases}S_i(\omega)/(\sigma\sqrt{n}), & t=i/n, i=0,1,\cdots,n,\\ \text{线性}, & (i-1)/n\leqslant t\leqslant i/n.\end{cases} \tag{5.8}$$

这里为方便计，限于讨论正则化因子为 $\sigma\sqrt{n}$ 情形. 可写

$$W_n(t,\omega)=\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\{S_{[nt]}(\omega)+(nt-[nt])X_{[nt]+1}\}. \tag{5.9}$$

易见，它是 C 上随机元，我们称 $\{W_n\}$ 是由 r.v. 列 $\{X_n\}$ 产生的部分和过程列. 考察独立 r.v. 列所产生的部分和过程列的弱收敛性是本章的重要任务. 我们来给出部分和过程列 $\{W_n(t,\omega)\}$ 是一致胎紧的一个充分条件.

定理 5.4　设 $\{W_n\}$ 是由 (5.9) 定义的. 若对任给 $\varepsilon>0$，有 $\lambda>1$ 和正整数 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时对一切 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 有

$$P\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}|S_{k+i}-S_k|\geqslant\lambda\sigma\sqrt{n}\right\}<\varepsilon/\lambda^2,\tag{5.10}$$

则$\{W_n\}$是一致胎紧的.

证　首先来证此时对任给的$\varepsilon>0$, $\eta>0$，有$\delta=\delta(\varepsilon,\eta)$ $(0<\delta<1)$和$n_0=n_0(\varepsilon,\eta)$，使当$n\geqslant n_0$时有

$$P\left\{\max_{i\leqslant n\delta}|S_{k+i}-S_k|\geqslant\lambda\sigma\sqrt{n}\right\}\leqslant\delta\eta.\tag{5.11}$$

事实上，由定理的条件，对$\eta\varepsilon^2$，有$\lambda(>1)$及n_1，使当$n\geqslant n_1$时，对每一k有

$$P\left\{\max_{i\leqslant n}|S_{k+i}-S_k|\geqslant\lambda\sigma\sqrt{n}\right\}\leqslant\eta\varepsilon^2/\lambda^2.\tag{5.12}$$

取$\delta=\varepsilon^2/\lambda^2$. 由于$\lambda>1>\varepsilon$（总可设$\varepsilon,\eta<1$），所以$0<\delta<1$. 又设$n_0$是大于$n_1/\delta$的整数. 故当$n\geqslant n_0$时，就有$[n\delta]\geqslant n_1$. 这样从(5.12)就可写出

$$P\left\{\max_{i\leqslant[n\delta]}|S_{k+i}-S_k|\geqslant\lambda\sigma\sqrt{[n\delta]}\right\}\leqslant\eta\varepsilon^2/\lambda^2.$$

因$\lambda\sqrt{[n\delta]}\leqslant\varepsilon\sqrt{n}$，$\eta\varepsilon^2/\lambda^2=\eta\delta$，即得(5.11)成立.

现在来验证定理5.3′的条件被满足. 由于$W_n(0)=0$，所以只需证明由(5.11)可推出(5.7)成立. 对给定的t和(5.11)中的δ，有正整数k和j使

$$k/n\leqslant t<(k+1)/n,\quad (j-1)/n\leqslant t+\delta/2<j/n.$$

从W_n的折线形状知

$$\sup_{t\leqslant s\leqslant t+\delta/2}|W_n(s)-W_n(t)|\leqslant\frac{2}{\sigma\sqrt{n}}\max_{0\leqslant i\leqslant j-k}|S_{k+i}-S_k|.$$

若$n\geqslant 4/\delta$，则$j-k<n\delta$. 所以当$n\geqslant\max(n_0,4/\delta)$时，由(5.11)可得

$$P\left\{\sup_{t\leqslant s\leqslant t+\delta/2}|W_n(s)-W_n(t)|\geqslant 2\varepsilon\right\}\leqslant P\left\{\max_{0\leqslant i\leqslant j-k}|S_{k+i}-S_k|\geqslant\varepsilon\sigma\sqrt{n}\right\}$$

$$\leqslant P\left\{\max_{0\leqslant i\leqslant n\delta}|S_{k+i}-S_k|\geqslant\varepsilon\sigma\sqrt{n}\right\}\leqslant\delta\eta.$$

证毕.

注 5.1　当$\{X_n\}$是平稳r.v.列时，(5.10)式即为

$$P\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i|\geqslant\lambda\sigma\sqrt{n}\right\}\leqslant\varepsilon/\lambda^2.\tag{5.13}$$

5.3 Donsker 定理

定义 5.1　$(C,\mathscr{C})$上具有下述性质的概率测度μ_W称为Wiener测度：

(i) 对任一$t\in[0,1]$，r.v. $X(t)$在μ_W下服从正态分布$N(0,t)$，即

$$\mu_W\{X(t)\leqslant a\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{a}\mathrm{e}^{-u^2/(2t)}\mathrm{d}u,\tag{5.14}$$

当$t=0$时，理解为$\mu_W(X(0)=0)=1$；

(ii) 随机过程 $\{X(t), 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ 在概率测度 μ_W 下具有独立增量，即若

$$0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_k \leqslant 1,$$

则在 μ_W 下，r. v. $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \cdots, X(t_k) - X(t_{k-1})$ 是相互独立的.

今后 Wiener 测度 μ_W 所对应的随机元记为 $W = \{W(t)\}$，称为 Wiener 过程. 由定义易见，当 $s \leqslant t$ 时，r. v. $W(s)$ 与 $W(t) - W(s)$ 是独立的，故知 $W(t) - W(s)$ 服从正态分布 $N(0, t-s)$. 这样 $(C, \mathscr{C})$ 上的概率测度 P 为 Wiener 测度当且仅当它所对应的随机元 W 的有限维分布，即 $(W(t_1), \cdots, W(t_k))$ 的分布为 $N(\mathbf{0}, \Lambda_{t_1, \cdots, t_k})$，其中协方差阵 $\Lambda_{t_1, \cdots, t_k}$ 的 (i, j) 元为 $\min(t_i, t_j)$. 可以证明在 $(C, \mathscr{C})$ 上存在着满足 (i) 和 (ii) 的概率测度 μ_W. 我们将在下一章给出一般概率空间上 Wiener 测度存在的一个构造性证明.

下面我们来给出著名的 Donsker 定理.

定理 5.5 (Donsker 1951) 设 $\{X_n; n = 1, 2, \cdots\}$ 是 i. i. d. r. v. 列，$EX_1 = 0$，$EX_1^2 = \sigma^2$，$0 < \sigma^2 < \infty$. 则由 $\{X_n\}$ 所产生的部分和过程

$$W_n \xrightarrow{d} W.$$

证 先来证 W_n 的有限维分布弱收敛于 W 对应的有限维分布. 对 1 维情形，因

$$\left| W_n(t) - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]} \right| \leqslant \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} |X_{[nt]+1}| \xrightarrow{P} 0, \tag{5.15}$$

又由中心极限定理知 $S_{[nt]}/\sigma\sqrt{n} \xrightarrow{d} W(t)$，所以从第一章定理 5.5 得 $W_n(t) \xrightarrow{d} W(t)$. 对 2 维情形，设 $s < t$，由定理 3.2，若能证明

$$(W_n(s), W_n(t) - W_n(s)) \xrightarrow{d} (W(s), W(t) - W(s)),$$

就有 $(W_n(s), W_n(t)) \xrightarrow{d} (W(s), W(t))$. 为此，由 (5.15) 只需证明

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[ns]}, \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} (S_{[nt]} - S_{[ns]}) \right) \xrightarrow{d} (W(s), W(t) - W(s)) \tag{5.16}$$

就够了. 由于左边及右边的分量都是独立的，从中心极限定理得 (5.16) 成立. 一般 k 维情形同理可得.

为证明 $\{W_n\}$ 具有一致胎紧性，由定理 5.4 只需验证 (5.13) 被满足. 对任一实数 $\lambda > 0$ 有

$$P\{\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |S_i| \geqslant \lambda\sigma\sqrt{n}\} \leqslant 2P\{|S_n| \geqslant (\lambda - \sqrt{2})\sigma\sqrt{n}\}. \tag{5.17}$$

事实上，如记 $E_i = \{\max_{1 \leqslant j < i} |S_j| < \lambda\sigma\sqrt{n} \leqslant |S_i|\}$，$i = 1, 2, \cdots, n$，此时 $\{E_i; i =$

$1,\cdots,n\}$ 两两不相交且 $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \{\max_{1\le i\le n} |S_i| \ge \lambda\sigma\sqrt{n}\}$. 这样

$$P\{\max_{1\le i\le n}|S_i| \ge \lambda\sigma\sqrt{n}\} \le P\{|S_n| \ge (\lambda-\sqrt{2})\sigma\sqrt{n}\}$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-1} P\{E_i, |S_n| < (\lambda-\sqrt{2})\sigma\sqrt{n}\}.$$

而后一和式不超过

$$\sum_{i=1}^{n-1} P\{E_i, |S_n-S_i| \ge \sigma\sqrt{2n}\} = \sum_{i=1}^{n-1} P(E_i)P\{|S_n-S_i| \ge \sigma\sqrt{2n}\}$$
$$\le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} P(E_i) \le \frac{1}{2}P\{\max_{1\le i\le n}|S_i| \ge \lambda\sigma\sqrt{n}\},$$

代入即得(5.17). 当 $\lambda > 2\sqrt{2}$ 时有

$$P\{\max_{1\le i\le n}|S_i| \ge \lambda\sigma\sqrt{n}\} \le 2P\left\{|S_n| \ge \frac{1}{2}\lambda\sigma\sqrt{n}\right\}.$$

由中心极限定理知右边概率

$$P\{|S_n| \ge \lambda\sigma\sqrt{n}/2\} \to P\{|N| \ge \lambda/2\} \le 8E|N|^3/\lambda^3,$$

其中 N 是标准正态变量. 所以对任给 $\varepsilon > 0$ 及充分大 λ, 有 n_0, 当 $n \ge n_0$ 时

$$P\{\max_{1\le i\le n}|S_i| \ge \lambda\sigma\sqrt{n}\} \le \varepsilon/\lambda^2.$$

证毕.

Donsker 定理的深刻性在于运用它可以导出部分和的函数的极限分布, 这是概率统计学者所关心的一个课题. 这里给出一个例子.

定理 5.6　设 r.v. 列 $\{X_n\}$ 如定理 5.5, 我们有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\max_{1\le i\le n} S_i \le u\right\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^u e^{-v^2/2}\mathrm{d}v, \quad u \ge 0. \tag{5.18}$$

证　由定理 5.5, $W_n \xrightarrow{d} W$. 因为 $h(X) = \sup_{0\le t\le 1} X(t)$ 是 C 上连续泛函, 故由定理 3.2 得

$$(\sigma\sqrt{n})^{-1}\max_{1\le i\le n} S_i = \sup_{0\le t\le 1} W_n(t) \xrightarrow{d} \sup_{0\le t\le 1} W(t). \tag{5.19}$$

余下来只需证明 $\sup_t W(t)$ 的分布等于(5.18)右边. 而它可以通过计算特殊的 i.i.d. r.v. 列的 $\sup_t W_n(t)$ 的分布来实现.

设 i.i.d. r.v. 列 $\{X_n\}$ 有分布

$$P\{X_n = 1\} = P\{X_n = -1\} = 1/2. \tag{5.20}$$

我们来证此时对任何非负整数 k 有

$$P\left\{\max_{1\le i\le n} S_i \ge k\right\} = 2P\{S_n > k\} + P\{S_n = k\}. \tag{5.21}$$

若 $k=0$，则左边等于1；由 X_n 的对称性知 $P\{S_n>0\}=P\{S_n<0\}$，右边也为1，故(5.21)成立．记 $M_n=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}S_i$．若 $k>0$，由于

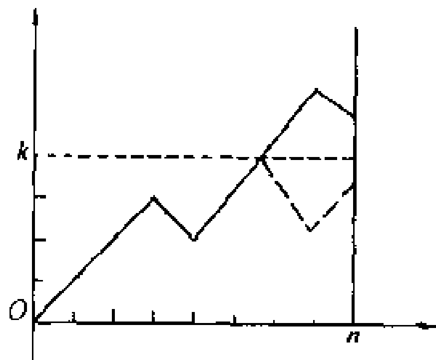
$$P\{M_n\geqslant k\}-P\{S_n=k\}=P\{M_n\geqslant k,S_n<k\}+P\{M_n\geqslant k,S_n>k\},$$

$$P\{M_n\geqslant k,S_n>k\}=P\{S_n>k\},$$

故若能证明

$$P\{M_n\geqslant k,S_n>k\}=P\{M_n\geqslant k,S_n<k\},\tag{5.22}$$

就得(5.21)成立．而(5.22)可由如下的反射原理得出：由假设(5.20)，所有 2^n 个可能路径 $(S_1,S_2,\cdots,S_n)$ 的概率相等都是 $1/2^n$．对(5.22)中左边事件的一个路径 $(S_1,S_2,\cdots,S_n)$，在首次遇到 k 处反射后得右边事件的一个路径，这一反射对应是一一的，故(5.22)成立．



由此按中心极限定理

$$P\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}S_i\geqslant[u\sqrt{n}]\}$$
$$=2P\{S_n>[u\sqrt{n}]\}$$
$$+P\{S_n=[u\sqrt{n}]\}\to 2P\{N>u\},$$

所以得证

$$\lim_{n\to\infty}P\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}S_i\leqslant u\sqrt{n}\}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^u\exp(-v^2/2)\mathrm{d}v.$$

由此有

$$P\Big\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}W(t)<u\Big\}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^u\exp(-v^2/2)\mathrm{d}v.$$

定理证毕．

类似地可以推出

$$P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|W(t)|\leqslant u\}=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\exp\Big\{-\frac{\pi^2(2k+1)^2}{8u^2}\Big\}.$$

注5.2　在定理的证明中，我们利用了下列事实：$h(W_n)$ 的极限分布与产生 W_n 的r.v. $\{X_n\}$ 的分布无关．为寻求这一极限分布，可通过一个特殊的r.v.列来求得它．这一思想首先由 Erdös Kac 在1946年给出，并称为不变原理．由于这一原因，Donsker 定理常被称为 Donsker **不变原理**，也称为**弱不变原理**或**泛函中心极限定理**．

§6　$D[0,1]$ 空间，Skorohod 拓扑

6.1　$D[0,1]$ 空间

空间 $D = D[0,1]$ 为$[0,1]$上右连续且存在有限左极限的全体函数. 即 $x \in D$，如果对任一 $t(0 \leqslant t \leqslant 1)$

$$x(t+) = \lim_{s \downarrow t} x(s) \text{ 存在且 } x(t+) = x(t);$$

$$x(t-) = \lim_{s \uparrow t} x(s) \text{ 存在有限.}$$

所以 D 中元的任一间断点都是第一类间断点. 显然 $C \subset D$.

对 D 的元 x，$T_0 \subset [0,1]$，记

$$w_x(T_0) = \sup_{s,t \in T_0} |x(s) - x(t)|, \tag{6.1}$$

$$w_x(\delta) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1-\delta} w_x([t, t+\delta]). \tag{6.2}$$

引理 6.1　对任一 $x \in D$ 和 $\varepsilon > 0$，在$[0,1]$中有点 $t_0, t_1, \cdots, t_r$，$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = 1$ 使得

$$w_x([t_{i-1}, t_i)) < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \cdots, r). \tag{6.3}$$

证　令 $\tau = \sup\{t: [0,t)$ 可分成有限个满足(6.3)的小区间$\}$. 只需证明 $\tau = 1$. 由于 $x(0) = x(0+)$，所以 $\tau > 0$. 因 $x(\tau-)$ 存在有限，$[0,\tau)$ 本身可作这样分解. 又因 $x(\tau) = x(\tau+)$，故 $\tau < 1$ 是不可能的.

注 6.1　由引理可知，对任一 $x \in D$，满足：

1) 对任一 $\varepsilon > 0$，至多有有限个 t，使 $x(t)$ 在 t 上的跃度 $|x(t) - x(t-)|$ 大于 ε. 由此

2) $x(t)$ 至多有可列个间断点.

3) $x(t)$ 是有界的，即 $\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)| < \infty$.

4) $x(t)$ 可用简单函数一致地逼近，因此 $x(t)$ 是 Borel 可测的.

相应于空间 C 中的连续模 $w_x(\delta)$，对$[0,1]$上的实函数 $x(t)$ 和 $0 < \delta < 1$，令

$$w'_x(\delta) = \inf_{\{t_i\}} \max_{1 \leqslant i \leqslant r} w_x([t_{i-1}, t_i)), \tag{6.4}$$

其中 inf 是对满足下述条件的有限点集$\{t_i\}$来取的

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = 1, \quad t_i - t_{i-1} > \delta \ (i = 1, \cdots, r-1). \tag{6.5}$$

由引理 6.1 可知对任一 $x \in D$，

$$\lim_{\delta \to 0} w'_x(\delta) = 0. \tag{6.6}$$

我们知道 $x \in C$ 当且仅当 $\lim_{\delta \to 0} w_x(\delta) = 0$. 对于 D 的元有

引理 6.2 $x \in D$ 当且仅当(6.6)式成立.

此命题请读者作为练习补证之.

因为对任一 $\delta, 0<\delta<1/2$,区间 $[0,1)$ 可被分解成一些区间 $[t_{i-1}, t_i)$,使 $\delta < t_i - t_{i-1} \leqslant 2\delta$,所以有

$$w'_x(\delta) \leqslant w_x(2\delta), \quad 0<\delta<1/2. \tag{6.7}$$

由引理6.2,(6.7)的相反不等式一般不成立. 因为对于不连续的 $x(t)$, $\lim\limits_{\delta\to 0} w_x(\delta) \neq 0$. 但若 $x \in C$,对任给 $\varepsilon > 0$,可选取满足(6.5)式的点组 $\{t_i\}$,且使

$$\max_{1\leqslant i\leqslant r} w_x([t_{i-1}, t_i)) < w'_x(\delta) + \varepsilon. \tag{6.8}$$

又若 $|s-t|<\delta$,则 s 和 t 或在同一个小区间 $[t_{i-1}, t_i)$ 中,或在相邻的小区间中. 故由(6.8)得

$$w_x(\delta) \leqslant 2w'_x(\delta) + 2\varepsilon. \tag{6.9}$$

由 ε 的任意性,即得当 $x \in C$ 时

$$w_x(\delta) \leqslant 2w'_x(\delta). \tag{6.10}$$

这样由(6.7)和(6.10)可知,当 $x\in C$ 时, $w_x(\delta)$ 与 $w'_x(\delta)$ 实质上是一样的. 由引理 6.2,在 D 中 $w'_x(\delta)$ 也能具有 C 中 $w_x(\delta)$ 同样的作用.

6.2 Skorohod 拓扑

在 C 中的一致拓扑 $\rho(x,y) = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t) - y(t)|$ 下,两个函数 $x(t), y(t)$ 很接近,是指 $x(t)$ 的图象可从 $y(t)$ 的图象经过纵坐标的一个一致小的移动(横坐标固定)得出. 在 D 中,我们还将允许时间尺度(横坐标)有一个一致小的"变动",Skorohod 拓扑就体现了这一想法.

令 $\Lambda = \{[0,1]$ 到 $[0,1]$ 上严格增的连续函数 $\lambda(t)$,满足 $\lambda(0)=0, \lambda(1)=1\}$.

Skorohod 对空间 D 中任意两元 x, y 定义距离 $d(x,y)$ 为具有下述性质的 ε 的下确界:存在 $\lambda \in \Lambda$,使得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\lambda(t) - t| < \varepsilon, \quad \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t) - y(\lambda(t))| < \varepsilon. \tag{6.11}$$

引理 6.3 $d(x,y)$ 是空间 D 的一个距离函数.

证 由于 D 中的元 x, y 是有界的,所以 $0 \leqslant d(x,y) < \infty$,即 $d(x,y)$ 有意义. 现在来验证如上定义的 d 满足距离函数的条件.

1° 显然 $d(x,x) = 0$. 反之,若 $d(x,y) = 0$,则由 $\lambda(1) = 1$,知 $x(1) = y(1)$;由 $\lambda(0) = 0$ 知 $x(0) = y(0)$. 对任一 $t \in [0,1]$,由(6.11)有点列 $\{t_n\}$, $t_n \to t$ 使得 $y(t_n) \to x(t)$. 若 $\{t_n\}$ 中有无限个 $t_n \geqslant t$,则由 $y(t)$ 的右连续性,得 $y(t) = x(t)$,否则有 $y(t-) = x(t)$. 由于 y 至多只有可列个不连续点,故除去可列个点外 $y(t-) = y(t)$. 因此除可列个点外 $y(t) = x(t)$. 由右连续性,对任一 $t, 0 \leqslant t \leqslant 1$,有 $x(t) = y(t)$,这就得证 $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$.

2° $d(x,y)=d(y,x)$. 事实上,若以 λ^{-1} 记 λ 的反函数,因 $\lambda\in\Lambda$,所以 $\lambda^{-1}\in\Lambda$,而且

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\lambda^{-1}(t)-t|=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|t-\lambda(t)|,$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(\lambda^{-1}(t))-y(t)|=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-y(\lambda(t))|,$$

故得 $d(x,y)=d(y,x)$.

3° $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$.

因若 $\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda$,就有 $\lambda_2\circ\lambda_1=\lambda_2(\lambda_1)\in\Lambda$. 而且

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\lambda_2(\lambda_1(t))-t|\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\lambda_2(\lambda_1(t))-\lambda_1(t)|+\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\lambda_1(t)-t|$$
$$=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\lambda_2(t)-t|+\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\lambda_1(t)-t|,$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-z(\lambda_2(\lambda_1(t)))|\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-y(\lambda_1(t))|$$
$$+\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|y(\lambda_1(t))-z(\lambda_2(\lambda_1(t)))|$$
$$=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-y(\lambda_1(t))|$$
$$+\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|y(t)-z(\lambda_2(t))|,$$

这就证明了 $d(x,y)$ 是 D 上一个距离函数.

注 6.2 由 d 的定义可见 $x_n\to x$,即 $d(x_n,x)\to 0$ 的充要条件是存在 $\{\lambda_n\}\subset\Lambda$ 使关于 t 一致地有

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n(t)=t,\quad \lim_{n\to\infty}x_n(\lambda_n(t))=x(t). \tag{6.12}$$

由此可见,若在 $[0,1]$ 上一致地有 $x_n(t)\to x(t)$,则在 D 中 $d(x_n,x)\to 0$,即 $x_n\to x$. 但由下例可知其逆不真.

例 6.1 令 $x_n(t)=I_{[0,1/2+1/n)}(t)$, $x(t)=I_{[0,1/2)}(t)$. 若取 λ_n 满足 $\lambda_n(0)=0$, $\lambda_n(1)=1$, $\lambda_n(1/2)=1/2+1/n$,其余部分是由这三点连接成的折线. 此时 (6.12) 被满足,故在 D 中 $d(x_n,x)\to 0$. 但在 $t=1/2$ 上

$$x_n(1/2)=1\not\to x(1/2)=0.$$

然而若在 D 中,$d(x_n,x)\to 0$,则在 $x(t)$ 的连续点 t 上必有 $x_n(t)\to x(t)$. 这是因为

$$|x_n(t)-x(t)|\leqslant|x_n(t)-x(\lambda_n^{-1}(t))|+|x(\lambda_n^{-1}(t))-x(t)|. \tag{6.13}$$

由此可知,若 $x\in C$,且在 Skorohod 度量下有 $d(x_n,x)\to 0$,则在 $[0,1]$ 上一致地有 $x_n(t)\to x(t)$. 所以 C 在 D 中的相对拓扑就是 C 中的一致拓扑.

定理 6.1 度量空间 (D,d) 是可分的,但不完备.

证 令 A 为 D 中在 $t=1$ 上取有理值且在每一区间 $[(i-1)/k,i/k)$ 上

取有理常数值($i = 1,\cdots,k;k = 1,2,\cdots$)的全体函数. 我们来证可列集 A 在 D 中稠密.

事实上,对任给 $\varepsilon>0, x\in D$,取具有引理 6.1 中所述性质的点列 $0=t_0<t_1<\cdots<t_k=1$,取 m 充分大,记 $m_i=[m(t_i-t_{i-1})]$,把区间 $[t_{i-1},t_i)$ 等分为 m_i 个小区间($i=1,\cdots,k$),所得全部分点记为 $0=s_0<s_1<\cdots<s_r=1$. 作 $\lambda\in\Lambda$:

$$\lambda(s_i)=i/r\quad(i=1,\cdots,r),\text{其余处为线性.}$$

取有理数 $b_1,\cdots,b_r$ 使 $|b_i-x(s_{i-1})|<\varepsilon$. 令

$$x_r(t)=b_i\qquad \text{当}(i-1)/r\leqslant t<i/r,\ i=1,\cdots,r,$$
$$x_r(1)=b(\text{有理数})\qquad \text{且}\ |b-x(1)|<\varepsilon.$$

则 $x_r\in A$ 且 $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-x_r(\lambda(t))|<2\varepsilon$. 又当 m 充分大时也有 $|\lambda(t)-t|<2\varepsilon$. 这就证明了 A 在 D 中稠密.

D 关于 d 是不完备的. 考察

$$x_n(t)=I_{[1/2,1/2+1/n)}(t).$$

对于 λ:$\lambda(0)=0,\lambda(1)=1,\lambda(1/2)=1/2,\lambda(1/2+1/n)=1/2+1/m$,其余处线性. 我们有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\lambda(t)-t|=|1/m-1/n|,\quad \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_n(t)-x_m(\lambda(t))|=0;$$

对于不把 $1/2+1/n$ 映射到 $1/2+1/m$ 的 $\lambda(\in\Lambda)$,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_n(t)-x_m(\lambda(t))|=1.$$

由此 $d(x_m,x_n)=|1/m-1/n|$,即 $\{x_n\}$ 关于 d 是基本序列. 但易见在 (D,d) 中 $\{x_n\}$ 没有极限.

6.3 **度量 d_0**

现在我们在 D 上引进另一个度量 d_0,使得由 d_0 所产生的拓扑与 d 一样,即由 (D,d_0) 所确定的开集族与 (D,d) 所确定的开集族相重合. 因之,$d_0(x_n,x)\to 0$ 当且仅当 $d(x_n,x)\to 0$. 但此时 $d(x_n,x_m)\to 0$ 未必推出 $d_0(x_m,x_n)\to 0$. 取 Λ 的子集 Λ_0:$\lambda\in\Lambda_0$ 当且仅当

$$\|\lambda\|=\sup_{0\leqslant s\neq t\leqslant 1}\left|\log\frac{\lambda(s)-\lambda(t)}{s-t}\right|<\infty.$$

对于 D 的任两元 x,y,定义 $d_0(x,y)$ 为具有下述性质的 ε 的下确界:存在 $\lambda\in\Lambda_0$,使得

$$\|\lambda\|\leqslant\varepsilon,\ \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-y(\lambda(t))|\leqslant\varepsilon. \tag{6.14}$$

引理 6.4 $d_0(x,y)$ 是空间 D 的一个距离函数.

证 设 $x,y\in D$, $x(t),y(t)$ 是有界的,所以 $d_0(x,y)$ 有限. 由于

$$\|\lambda^{-1}\| = \|\lambda\|,\quad \|\lambda_1(\lambda_2)\| \leqslant \|\lambda_1\| + \|\lambda_2\|,$$

可知 $d_0(x,y) = d_0(y,x)$, $d_0(x,z) \leqslant d_0(x,y) + d_0(y,z)$. 余下来证 $d_0(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$. 当 $x = y$ 时,显然 $d_0(x,y) = 0$. 反之,若 $d_0(x,y) < \varepsilon < 1/4$,则

$$d(x,y) < 2d_0(x,y). \tag{6.15}$$

事实上,当 $d_0(x,y) < \varepsilon$ 时,有某 $\lambda \in \Lambda_0$ 使(6.14)成立. 当 $\varepsilon < 1/4$ 时,由 $\lambda(0) = 0$ 及(6.14)的前一式有

$$\log(1-2\varepsilon) < -\varepsilon < \log(\lambda(t)/t) < \varepsilon < \log(1+2\varepsilon),$$

因此 $|\lambda(t) - t| < 2t\varepsilon < 2\varepsilon\ (0 \leqslant t \leqslant 1)$,所以(6.15)成立. 由此若 $d_0(x,y) = 0$,则 $d(x,y) = 0$,所以 $x = y$. 证毕.

现在指出与(6.15)相反的事实不真. 事实上,对于 $x_n(t) = I_{[1/2,1/2+1/n]}(t)$,有 $d(x_n,x_m) = |n^{-1} - m^{-1}|$,而

$$d_0(x_n,x_m) = \min(1, |\log(m/n)|) \quad (m,n > 3).$$

这说明 $\{x_n\}$ 在 d 下为基本序列,而在 d_0 下却不是.

为证明 d 与 d_0 产生的拓扑相同,我们先来证明一个引理,它指出当 $d(x,y)$ 和 $w'_x(\delta)$(或 $w'_y(\delta)$)都小时,$d_0(x,y)$ 是小的.

引理 6.5　若 $d(x,y) < \delta^2 (0 < \delta < 1/4)$,则

$$d_0(x,y) \leqslant 4\delta + w'_x(\delta). \tag{6.16}$$

证　取满足(6.5)和下式的点列 $\{t_i\}$

$$w_x([t_{i-1},t_i)) < w'_x(\delta) + \delta,\quad i = 1,\cdots,r. \tag{6.17}$$

由于 $d(x,y) < \delta^2$,故存在 $\mu \in \Lambda$,使得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t) - y(\mu(t))| = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(\mu^{-1}(t)) - y(t)| < \delta^2, \tag{6.18}$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |\mu(t) - t| < \delta^2. \tag{6.19}$$

在 Λ 中取这样的 λ:$\lambda(t_i) = \mu(t_i)$,$i = 0,1,\cdots,r$,其余处为连接这些点的折线. 由于 $\mu^{-1}(\lambda(t_i)) = t_i$ 且严格增,所以 t 和 $\mu^{-1}(\lambda(t))$ 必在同一个区间 $[t_{i-1},t_i)$ 中. 由(6.17)和(6.18)得

$$\begin{aligned}|x(t) - y(\lambda(t))| &\leqslant |x(t) - x(\mu^{-1}(\lambda(t)))| + |x(\mu^{-1}(\lambda(t))) - y(\lambda(t))| \\ &< w'_x(\delta) + \delta + \delta^2 < w'_x(\delta) + 2\delta.\end{aligned}$$

余下来只需证明 $\|\lambda\| \leqslant 4\delta$. 事实上,由于在 t_i 上 λ 与 μ 重合,由(6.19)和 $t_i - t_{i-1} > \delta$,我们有

$$|\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1}) - (t_i - t_{i-1})| < 2\delta^2 < 2\delta(t_i - t_{i-1}).$$

因 λ 是折线,故对任给 $s,t \in [0,1]$,$|\lambda(t) - \lambda(s) - (t-s)| \leqslant 2\delta|t-s|$,因此

$$\log(1-2\delta) \leqslant \log\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s} \leqslant \log(1+2\delta) \leqslant 2\delta.$$

又当 $\delta < 1/4$ 时，$\log(1-2\delta) \geqslant -2\delta-4\delta^2 \geqslant -4\delta$，所以 $\|\lambda\| \leqslant 4\delta$.

定理 6.2 d 与 d_0 是等价的.

证 由(6.15)可知当 $d_0(x_n,x)\to 0$ 时有 $d(x_n,x)\to 0$. 反之，由引理 6.2，对任一 $x\in D$ 和 $\varepsilon>0$，有 δ 使得 $w'_x(\delta)<\varepsilon$，并可选 δ 使 $4\delta<\varepsilon$. 由引理 6.5 知，当 $d(x,y)<\delta^2<\varepsilon$ 时，$d_0(x,y)<2\varepsilon$，所以当 $d(x_n,x)\to 0$ 时也有 $d_0(x_n,x)\to 0$.

6.4 (D,d_0) 的完备性

定理 6.3 度量空间 (D,d_0) 是可分完备的.

证 由于 d_0 与 d 等价，由定理 6.1 即得 (D,d_0) 的可分性. 现在来证 d_0 下对任一基本序列 $\{x_n\}$ 必有 $x\in D$ 使 $d_0(x_n,x)\to 0$. 因为 $\{x_n\}$ 在 d_0 下是基本的，对任给 n 有 $y_n = x_{k_n}$ 使得

$$d_0(y_n,y_{n+1}) < 1/2^n. \tag{6.20}$$

这就是说，存在 $\mu_n\in\Lambda_0$ 使得

$$\|\mu_n\| < 1/2^n,\quad \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|y_n(t)-y_{n+1}(\mu_n(t))| < 1/2^n. \tag{6.21}$$

由(6.15)可知 $\sup\limits_t|\mu_n(t)-t| < 1/2^{n-1}$. 由此对任一 $m\geqslant 1$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\mu_{n+m+1}(\mu_{n+m}(\cdots(\mu_n(t))\cdots))-\mu_{n+m}(\cdots(\mu_n(t))\cdots)|$$
$$=\sup_{0\leqslant s\leqslant 1}|\mu_{n+m+1}(s)-s| \leqslant 1/2^{n+m}.$$

即对任一固定的 n，当 $m\to\infty$ 时，函数 $\mu_{n+m}(\cdots(\mu_n(t))\cdots)$ 是(关于 t)一致地基本的，所以它一致收敛. 记

$$\lambda_n(t) = \lim_{m\to\infty}\mu_{n+m}(\cdots(\mu_{n+1}(\mu_n(t)))\cdots), \tag{6.22}$$

这样 λ_n 是连续不减的，且 $\lambda_n(0)=0$，$\lambda_n(1)=1$. 若能证 $\|\lambda_n\|$ 有限，就得 λ_n 是严格增的，因此 $\lambda_n\in\Lambda_0$. 事实上，因为 $\|\lambda(\mu)\|\leqslant\|\lambda\|+\|\mu\|$，所以

$$|\log\{[\mu_{n+m}(\cdots(\mu_n(t))\cdots)-\mu_{n+m}(\cdots(\mu_n(s))\cdots)]/(t-s)\}|$$
$$\leqslant \|\mu_{n+m}(\cdots(\mu_n)\cdots)\| \leqslant \|\mu_n\|+\|\mu_{n+1}\|+\cdots+\|\mu_{n+m}\|$$
$$< 1/2^{n-1}.$$

让 $m\to\infty$，就得 $\|\lambda_n\|\leqslant 1/2^{n-1}$，故得证 $\lambda_n\in\Lambda_0$.

由(6.22)知，$\lambda_n=\lambda_{n+1}(\mu_n)$，所以由(6.21)得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|y_n(\lambda_n^{-1}(t))-y_{n+1}(\lambda_{n+1}^{-1}(t))| = \sup_{0\leqslant s\leqslant 1}|y_n(s)-y_{n+1}(\mu_n(s))| < 1/2^n,$$

这就是说 $\{y_n(\lambda_n^{-1})\}$ 是 D 中一致基本序列，因此一致收敛于一极限函数 $x(t)$，且易证 $x\in D$. 由于

$$\|\lambda_n\| \to 0, \quad \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |y_n(\lambda_n^{-1}(t)) - x(t)| \to 0,$$

即 $d_0(y_n, x) \to 0$，由此得证也有 $d_0(x_n, x) \to 0$. 证毕.

6.5 一致拓扑 ρ

由一致距离

$$\rho(x, y) = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t) - y(t)|$$

给定的 D 上的拓扑，称为 D 上的一致拓扑.

引理 6.6 度量空间 (D, ρ) 是完备的，但不可分.

证 设 $\{x_n\}$ 是 (D, ρ) 的基本序列，则对任给的 $t(0 \leqslant t \leqslant 1)$，$\{x_n(t)\}$ 是基本数列，故有 $x(t)$ 使 $x_n(t) \to x(t)(n \to \infty)$，且 $\rho(x_n, x) \to 0$. 现在来证 $x \in D$. 由于

$$\begin{aligned}|x(t+\delta) - x(t)| \leqslant\ & |x(t+\delta) - x_n(t+\delta)| \\ & + |x_n(t+\delta) - x_n(t)| \\ & + |x_n(t) - x(t)| \\ \leqslant\ & 2\rho(x_n, x) + |x_n(t+\delta) - x_n(t)|,\end{aligned}$$

对任给 $\varepsilon > 0$，有 n_0，使当 $n \geqslant n_0$ 时 $\rho(x_n, x) < \varepsilon$. 对于固定的 n_0 有 $\delta_0 > 0$，当 $0 < \delta < \delta_0$ 时 $|x_{n_0}(t+\delta) - x_{n_0}(t)| < \varepsilon$，故

$$|x(t+\delta) - x(t)| < 3\varepsilon,$$

即得 $x(t)$ 是右连续的. 同样可证 $x(t)$ 的左极限存在，因此 $x \in D$.

考虑 D 中不可列个元 $x_\theta(0 < \theta < 1)$

$$x_\theta(t) = I_{[\theta, 1]}(t),$$

它们间任两元的 ρ 距离都为 1，即 (D, ρ) 有不可列的离散集，所以不可分. 证毕.

若记 d 是 Skorohod 拓扑的两个距离之一，则易见对 D 中任两元 x, y 有

$$d(x, y) \leqslant \rho(x, y).$$

由此可见一致拓扑较 Skorohod 拓扑来得精细，即从 $\rho(x_n, x) \to 0$ 可推得 $d(x_n, x) \to 0$. 另一方面，在 (6.13) 中已指出，若 $d(x_n, x) \to 0$ 且 $x \in C$，则也有 $\rho(x_n, x) \to 0$（这就是上面提到过的 C 在 D 中的相对拓扑就是 C 中的一致拓扑）.

§7 $D[0,1]$ 中概率测度弱收敛，Donsker 定理的一般化

7.1 有限维分布

由于 (D, d_0) 是可分完备的度量空间，从 Prohorov 定理可知，欲证 D 上概率测度列 P_n 弱收敛于某概率测度 P，只需讨论 P_n 的有限维分布的收敛性与

$\{P_n\}$的一致胎紧性. 在$C[0,1]$中,因为投影映射$\pi_{t_1,\cdots,t_k}$的连续性,使得$P_n\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1}\Rightarrow P\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1}$的讨论十分简单. 在$D[0,1]$中,我们将看到$\pi_{t_1,\cdots,t_k}$并非处处连续,所以就要复杂一些. 我们有

引理 7.1 π_0,π_1在D上处处连续. 若$0<t<1$,那么π_t在D的元x连续当且仅当x在t点连续.

证 因对任一$\lambda\in\Lambda,\lambda(0)=0,\lambda(1)=1$,因此,若$d(x,y)<\varepsilon$,就有$|x(0)-y(0)|<\varepsilon$, $|x(1)-y(1)|<\varepsilon$,即$|\pi_0(x)-\pi_0(y)|<\varepsilon$, $|\pi_1(x)-\pi_1(y)|<\varepsilon$. 所以$\pi_0,\pi_1$在$D$上处处连续.

对后一结论,由(6.13)即知条件充分. 现用反证法来证条件是必要的. 设π_t在x连续,但x在t不连续. 令$\lambda_n\in\Lambda$如下:$\lambda_n(0)=0$, $\lambda_n(1)=1$, $\lambda_n(t)=t-1/n$,其余处是线性的. 取$x_n(t)=x(\lambda_n(t))$,那么$d(x_n,x)\to 0$. 但是

$$\pi_t(x_n)=x_n(t)=x(t-1/n)\to x(t-)\neq x(t)=\pi_t(x),$$

产生矛盾. 得证条件必要.

引理 7.2 $D[0,1]$上的投影映射$\pi_{t_1,\cdots,t_k}$是可测的.

证 只需对$0<t<1$证明π_t的可测性. 若$d(x_n,x)\to 0$,则由引理7.1,在x的连续点s上有$x_n(s)\to x(s)$,因此由引理6.1的注,除去Lebesgue测度为0的集(实际上是x的至多可列个不连续点)外,都有$x_n(s)\to x(s)$. 又由$d(x_n,x)\to 0$,存在$\lambda_n\in\Lambda$,使得$\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant 1}|x_n(s)-x(\lambda_n^{-1}(s))|<\varepsilon$,所以

$$\sup_n\sup_{0\leqslant s\leqslant 1}|x_n(s)|<\sup_{0\leqslant s\leqslant 1}|x(s)|+\varepsilon<\infty.$$

由有界收敛定理可得,对任给$\varepsilon>0$,当$n\to\infty$时

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon}x_n(s)\mathrm{d}s\to\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon}x(s)\mathrm{d}s.$$

这样$h_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon}x(s)\mathrm{d}s$在Skorohod拓扑$d$下是连续的. 由于$x(t)$的右连续性,当$\varepsilon\downarrow 0$时,对任一$x\in D$,有$h_\varepsilon(x)\to\pi_t(x)$,这就得证$\pi_t$的可测性. 证毕.

设$\mathscr{D}$是D的关于Skorohod拓扑的Borel σ域,P是$(D,\mathscr{D})$上的概率测度. 令

$$T_P=\{t:0\leqslant t\leqslant 1,P(x:\pi_t\text{在}x\text{不连续})=0\}.$$

若记$J_t=\{x:x(t)\neq x(t-)\}$,则由引理7.1即知

$$T_P=\{t:0\leqslant t\leqslant 1,P(J_t)=0\}.$$

引理 7.3 $0,1\in T_P$,T_P在$[0,1]$中的余集至多是一个可列集. 若$t_1,\cdots,t_k\in T_P$,则除去P测度为0的集外,$\pi_{t_1,\cdots,t_k}$是连续的,即$\pi_{t_1,\cdots,t_k}$的不连续点集$D\pi_{t_1,\cdots,t_k}$的P测度为0.

证　显然 $0,1\in T_P$. 我们来证至多有可列个 t，使 $P(J_t)>0$. 为此记

$$J_t(\varepsilon)=\{x:|x(t)-x(t-)|\geqslant\varepsilon\}.$$

设 $t_n\uparrow t$，由引理 7.2 知集 $\{x:|x(t)-x(t_n)|\geqslant\eta\}$ 可测. 由此知

$$J_t(\varepsilon)=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}\{x:|x(t)-x(t_n)|\geqslant\varepsilon-1/m\}$$

也可测，故 $J_t=\bigcup\limits_{\varepsilon}J_t(\varepsilon)$ 可测. 对给定的 $\varepsilon>0,\delta>0$，至多有有限个 t 使 $P\{J_t(\varepsilon)\}\geqslant\delta$. 因若不然，有无穷个不同的点 $\{t_n\}$，使 $P\{J_{t_n}(\varepsilon)\}\geqslant\delta$，那么 $\limsup\limits_{n\to\infty}J_{t_n}(\varepsilon)$ 非空. 这与对 D 的任一元 x，它的跃度 $\geqslant\varepsilon$ 的点数有限矛盾. 故集 $\{t:P(J_t(\varepsilon))\geqslant\delta\}$ 有限. 因 $J_t(\varepsilon)\uparrow J_t(\varepsilon\to0)$，所以 $\{t:P(J_t)>0\}\subset\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{t:P(J_t(1/n))\geqslant1/m\}$ 可列. 这就证明了 T_P 在[0,1]中的余集至多可列. 余下部分是明显的. 证毕.

设 T_0 是区间[0,1]的一个子集，令

$$\mathscr{F}_{T_0}=\{\pi_{t_1\cdots t_k}^{-1}H:任何自然数\ k,t_1,\cdots,t_k\in T_0,H\in\mathscr{B}^k\},$$

其中 $\mathscr{B}^k$ 是 k 维 Borel σ 域. 那么易知 $\mathscr{F}_{T_0}$ 是 D 的子集所组成的一个域. 特别，$\mathscr{F}_{[0,1]}$ 就是 D 中的有限维柱集类.

定理 7.1　若 $1\in T_0$，且 T_0 在[0,1]中稠密，那么由 $\mathscr{F}_{T_0}$ 所产生的 σ 域等于 $\mathscr{D}$.

证　因 (D,d_0) 可分，只需证明每一开的 d_0 球 $S_{d_0}(x,r)$ 属于 $\mathscr{F}_{T_0}$ 生成的 σ 域.

在 T_0 内选取在[0,1]中稠密的点列 $t_1(=1),t_2,\cdots,t_n,\cdots$. 对任给的 $\varepsilon\in(0,r)$ 及 $k\geqslant1$ 令

$$A_k(\varepsilon)=\{y:存在\ \lambda\in\Lambda\ 使\ \|\lambda\|<r-\varepsilon,\max_{1\leqslant i\leqslant k}|y(t_i)-x(\lambda(t_i))|<r-\varepsilon\}.$$

如记

$$H_1=\{(x(\lambda(t_1)),\cdots,x(\lambda(t_k))):\lambda\in\Lambda\ 且\ \|\lambda\|<r-\varepsilon\},$$

$$H_2=\{(\alpha_1,\cdots,\alpha_k):存在(\beta_1,\cdots,\beta_k)\in H_1\ 使$$
$$|\alpha_i-\beta_i|<r-\varepsilon,i=1,\cdots,k\},$$

那么 H_2 是 $\mathbf{R}^k$ 中的一个开集，且易知 $A_k(\varepsilon)=\pi_{t_1\cdots t_k}^{-1}H_2$. 所以 $A_k(\varepsilon)\in\mathscr{F}_{T_0}$. 我们来证

$$S_{d_0}(x,r)=\bigcup_{\varepsilon}\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k(\varepsilon),$$

其中 $\bigcup\limits_{\varepsilon}$ 是对 $(0,r)$ 中一切有理数 ε 取并集.

易见(7.1)式左边被含于右边中，现在来证

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k(\varepsilon)\subset S_{d_0}(x,r).$$

事实上,若 $y\in\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k(\varepsilon)$,对每一$k$,有 $\lambda_k\in\Lambda$ 使得

$$\|\lambda_k\|<r-\varepsilon,\quad \max_{1\leqslant i\leqslant k}|y(t_i)-x(\lambda_k(t_i))|<r-\varepsilon. \tag{7.2}$$

由 Helly 定理,存在$\{\lambda_k\}$的一个子列$\{\lambda_{k'}\}$和不减函数λ,使对λ的任一连续点t有

$$\lim_{k'\to\infty}\lambda_{k'}(t)=\lambda(t). \tag{7.3}$$

我们来证 $\lambda\in\Lambda_0$ 且 $\|\lambda\|<r-\varepsilon$, $\sup_t|y(t)-x(\lambda(t))|<r-\varepsilon$. 设$s$和$t$是$\lambda$的两个不同的连续点,那么由(7.2)的前一式可知

$$\left|\log\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right|=\lim_{k'\to\infty}\left|\log\frac{\lambda_{k'}(t)-\lambda_{k'}(s)}{t-s}\right|\leqslant r-\varepsilon. \tag{7.4}$$

这样λ就不可能有跳跃点,因此λ处处连续,且是严格增的,所以$\lambda\in\Lambda_0$. 又由(7.4)得$\|\lambda\|\leqslant r-\varepsilon$. 因为$t_1=1$,由(7.2)得$|y(t_1)-x(t_1)|<r-\varepsilon$. 若$i>1$,那么由(7.2)对于$k'\geqslant i$有$|y(t_i)-x(\lambda_{k'}(t_i))|<r-\varepsilon$. 这样从(7.3)式,我们或者有$|y(t_i)-x(\lambda(t_i))|\leqslant r-\varepsilon$,或者有$|y(t_i)-x(\lambda(t_i)-)|\leqslant r-\varepsilon$. 由于$\{t_i\}$稠密,推得

$$\sup_t|y(t)-x(\lambda(t))|\leqslant r-\varepsilon.$$

这样就得证$d_0(x,y)\leqslant r-\varepsilon$,即$y\in S_{d_0}(x,r)$,所以(7.1)式成立. 证毕.

现在我们可以给出与定理 5.1 相应的结果.

定理 7.2 $(D,\mathscr{D})$上概率测度列$\{P_n\}$弱收敛于概率测度P当且仅当$\{P_n\}$是一致胎紧的,且对任给的$t_1,\cdots,t_k\in T_P$,有$P_n\pi_{t_1\cdots t_k}^{-1}\Rightarrow P\pi_{t_1\cdots t_k}^{-1}$.

证 条件必要显然. 下证条件充分. 因为$\{P_n\}$是一致胎紧的,由定理 4.4 知它是弱相对紧的. 它的每一子列$\{P_{n'}\}$有一弱收敛于某一概率测度Q的子列$\{P_{n''}\}$. 由引理 4.1 只需证明$Q=P$.

若$t_1,\cdots,t_k\in T_P\cap T_Q$,那么由假设知$P_{n''}\pi_{t_1\cdots t_k}^{-1}\Rightarrow P\pi_{t_1\cdots t_k}^{-1}$. 又因$P_{n''}\Rightarrow Q$,所以$P_{n''}\pi_{t_1\cdots t_k}^{-1}\Rightarrow Q\pi_{t_1\cdots t_k}^{-1}$. 由此推得当$t_1,\cdots,t_k\in T_P\cap T_Q$时

$$P\pi_{t_1\cdots t_k}^{-1}=Q\pi_{t_1\cdots t_k}^{-1}. \tag{7.5}$$

因T_P和T_Q都是$[0,1]$的可列子集的余集,所以$T_P\cap T_Q$也是$[0,1]$的可列子集的余集,这样它在$[0,1]$中是稠密的,且$1\in T_P\cap T_Q$. 由此按定理 7.1 得$\mathscr{D}$可由$t_i\in T_P\cap T_Q$中的点为参数的有限维柱集生成. 故由(7.5)即得$Q=P$. 证毕.

7.2 一致胎紧性

由上已知在空间$C[0,1]$中,验证一致胎紧性条件的关键是 Arzela-Ascoli 定理,它指出了C的子集具有紧的闭包的充要条件. 现在我们对空间$D[0,1]$

不加证明地给出类似于 Arzela Ascoli 定理的结果.

定理 7.3　在(D,d_0)中,集 A 有紧闭包当且仅当

$$\sup_{x\in A}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|<\infty,\tag{7.6}$$

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{x\in A}w'_x(\delta)=0.\tag{7.7}$$

与 C 中定理 5.2 一样,由定理 7.3 可写出 D 中概率测度列$\{P_n\}$一致胎紧的充要条件.

定理 7.4　空间 D 中的概率测度列$\{P_n\}$是一致胎紧的当且仅当下述条件被满足:

(i) 对任给 $\eta>0$,有 $a>0$,使得对每一 $n\geqslant 1$

$$P_n\{x:\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|>a\}\leqslant\eta;\tag{7.8}$$

(ii) 对任给 $\varepsilon>0,\eta>0$,有 $\delta,0<\delta<1$,和正整数 n_0,使当 $n\geqslant n_0$ 时

$$P_n\{x:w'_x(\delta)\geqslant\varepsilon\}\leqslant\eta.\tag{7.9}$$

当以 $w_x(\delta)$ 代替 $w'_x(\delta)$ 时,我们可以给出一个有用的一致胎紧性的充分条件.

定理 7.5　设对任何 $\eta>0$,有 $a>0$,使得对每一 $n\geqslant 1$ 有

$$P_n\{x:|x(0)|>a\}\leqslant\eta,\tag{7.10}$$

且对任给 $\varepsilon>0,\eta>0$,有 $\delta,0<\delta<1$,和 n_0,使当 $n\geqslant n_0$ 时

$$P_n\{x:w_x(\delta)\geqslant\varepsilon\}\leqslant\eta,\tag{7.11}$$

那么$\{P_n\}$是一致胎紧的. 又若 P 是$\{P_n\}$的子列$\{P_{n'}\}$的弱极限,则 $P(C)=1$.

证　由(6.7)知,当$\delta<1/2$时,$w'_x(\delta)\leqslant w_x(2\delta)$. 故由(7.11)即得定理 7.4 的条件(ii)被满足. 又由

$$\begin{aligned}|x(t)|&\leqslant|x(0)|+\sum_{i=1}^{k}|x(it/k)-x((i-1)t/k)|\\&\leqslant|x(0)|+kw_x(1/k),\end{aligned}$$

取 k 和 a 使 $1/k<\delta,\varepsilon\leqslant a/(2k)$,那么

$$\begin{aligned}\{\sup_t|x(t)|>a\}&\subset\{|x(0)|>a/2\}\cup\{w_x(1/k)>a/(2k)\}\\&\subset\{|x(0)|>a/2\}\cup\{w_x(\delta)\geqslant\varepsilon\}.\end{aligned}$$

由(7.10)和(7.11)知定理 7.4 的条件(i)被满足. 所以$\{P_n\}$是一致胎紧的.

注意到若 $w_y(\delta/2)\geqslant 2\varepsilon$,那么可推得 y 是集$\{x:w_x(\delta)\geqslant\varepsilon\}$的内点;因为 $P_{n'}\Rightarrow P$,所以由定理 1.2 有

$$P\{y:w_y(\delta/2)\geqslant 2\varepsilon\}\leqslant\liminf_{n'\to\infty}P_{n'}\{x:w_x(\delta)\geqslant\varepsilon\}.\tag{7.12}$$

设 $\varepsilon,\eta,\delta,n_0$ 如(7.11),由(7.12)得

$$P\{y:w_y(\delta/2)\geqslant 2\varepsilon\}\leqslant\eta.$$

所以对任一 $k>0$,有 $\delta_k\downarrow 0$,使对 $A_k=\{x:w_x(\delta_k)\geqslant 1/k\}$,有 $P(A_k)<1/k$. 记 $A=\liminf\limits_{k\to\infty}A_k$,则

$$P(A)\leqslant\lim_{k\to\infty}P(A_k)=0.$$

注意到当 $x\overline{\in}A$ 时,有无限多个 k,使 $x\overline{\in}A_k$,即 $w_x(\delta_k)<1/k$,所以 $\lim\limits_{\delta\to 0}w_x(\delta)=0$,这就证明了 $P(C)=1$.

7.3 Donsker 定理的一般化

现在来考察由组内独立的 r.v. 组列 $\{X_{n,k};k=1,\cdots,k_n,n\geqslant 1\}$ 所产生的部分和过程

$$W_n(t)=\sum_{k=1}^{k_n(t)}(X_{n,k}-a_{n,k}),\tag{7.13}$$

其中 $\{a_{n,k}\}$ 是适当选取的常数组列,$k_n(t)$ 是整值右连续不减函数,$k_n(0)=0$,$k_n(1)=k_n$.

我们来考察由(7.13)定义的部分和过程 W_n 弱收敛于 Wiener 过程 W 的条件. 虽然 W 仅定义于 $(C,\mathscr{C})$ 上,但它是容易被扩展到 $(D,\mathscr{D})$ 上的. 因为 $C\in\mathscr{D}$,且 Skorohod 拓扑在 C 中的相对拓扑与 C 中的一致拓扑重合,所以对任一 $A\in\mathscr{D}$,有 $A\cap C\in\mathscr{C}$. 如令 $W(A)=W(A\cap C)$,就把 W 的定义域扩张到 $\mathscr{D}$ 上,但这时 C 仍是 W 的支撑. 这样我们可把 W 看作 $(D,\mathscr{D})$ 上的概率测度,也可看作 D 的一个以这一概率测度为它的分布的随机元. 我们有

定理 7.6 设 $k_n(t)$ 是任给的 $[0,1]$ 上取正整数值的右连续不减函数,$k_n(0)=0$, $k_n(1)=k_n$. 对于独立 r.v. 组列 $\{X_{n,k}\}$,有常数列 $\{a_{n,k}\}$,记

$$W_n(t)=\sum_{k=1}^{k_n(t)}(X_{n,k}-a_{n,k}),\ 0\leqslant t\leqslant 1.\tag{7.14}$$

那么使得 $W_n\xrightarrow{d}W$ 且 $\{X_{n,k}\}$ 为无穷小的充要条件是对任给 $\varepsilon>0$ 满足:

(i) $$\sum_{k=1}^{k_n}P\{|X_{n,k}|\geqslant\varepsilon\}\to 0\ (n\to\infty);\tag{7.15}$$

(ii) 对任一 t, $0\leqslant t\leqslant 1$,当 $n\to\infty$ 时

$$\sum_{k=1}^{k_n(t)}\left\{\int_{|x|<\varepsilon}x^2\mathrm{d}F_{n,k}(x)-\left(\int_{|x|<\varepsilon}x\mathrm{d}F_{n,k}(x)\right)^2\right\}\to t,\tag{7.16}$$

其中 $F_{n,k}(x)$ 是 $X_{n,k}$ 的 d.f. 此时可取

$$a_{n,k}=\int_{|x|<\varepsilon}x\mathrm{d}F_{n,k}(x)+o(1).\tag{7.17}$$

注 7.1 结合第二章的定理 4.1 的注可见使 $W_n\xrightarrow{d}W$ 成立的充要条件

是使 $W_n(1)\xrightarrow{d}N(0,1)$ 成立的充要条件的自然推广.

定理 7.6 的证明　由第二章定理 4.1 知条件必要.

条件充分　对给定的 $\varepsilon>0$，令

$$Y_{n,k}=X_{n,k}I(|X_{n,k}|<\varepsilon)-EX_{n,k}I(|X_{n,k}|<\varepsilon),$$

$$Y_n(t)=\sum_{k=1}^{k_n(t)}Y_{n,k},\qquad 0\leqslant t<1.$$

当取 $a_{n,k}=EX_{n,k}I(|X_{n,k}|<\varepsilon)+o(1)$ 时，

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|W_n(t)-Y_n(t)|\leqslant\sum_{k=1}^{k_n}|X_{n,k}|I(|X_{n,k}|\geqslant\varepsilon)+o(1).$$

条件(1)等价于 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n}|X_{n,k}|\xrightarrow{P}0$，因此

$$P\Big\{\sum_{k=1}^{k_n}|X_{n,k}|I(|X_{n,k}|\geqslant\varepsilon)\geqslant\delta\Big\}$$

$$\leqslant P\{\max|X_{n,k}|\geqslant\min(\varepsilon,\delta)\}\to 0.$$

由此推得 $Y_n-W_n\xrightarrow{P}0$，所以只需证明 $Y_n\xrightarrow{d}W$ 就够了.

由第二章定理 4.1 可知 Y_n 的有限维分布弱收敛于 W 对应的有限维分布. 现在来证 $\{Y_n\}$ 是一致胎紧的. 由定理 7.5 只需验证

$$\lim_{h\to 0}\limsup_{n\to\infty}P\Big\{\sup_{|s-t|\leqslant h}|Y_n(s)-Y_n(t)|\geqslant\delta\Big\}=0.\tag{7.18}$$

由 Chebychev 不等式及(7.16)式，当 $n\to\infty$ 时有

$$P\Big\{\Big|\sum_{j=k_n(lh)+1}^{k_n((l+1)h)}Y_{n,j}\Big|\geqslant\frac{\delta}{8}\Big\}\leqslant\frac{64}{\delta^2}\sum_{j=k_n(lh)+1}^{k_n((l+1)h)}\mathrm{Var}Y_{n,j}\to\frac{64h}{\delta^2}.$$

所以由 Ottaviani 不等式(见附录二，二.10)及有限维分布的收敛性，有

$$\limsup_{n\to\infty}P\Big\{\sup_{|s-t|\leqslant h}|Y_n(s)-Y_n(t)|\geqslant\delta\Big\}$$

$$\leqslant\sum_{l<1/h}\limsup_{n\to\infty}P\Big\{\sup_{lh<t\leqslant(l+1)h}\Big|\sum_{j=k_n(lh)+1}^{k_n(t)}Y_{n,j}\Big|\geqslant\frac{\delta}{4}\Big\}$$

$$\leqslant\sum_{l<1/h}\limsup_{n\to\infty}\frac{\delta^2}{\delta^2-64h}P\Big\{\Big|\sum_{j=k_n(lh)+1}^{k_n((l+1)h)}Y_{n,j}\Big|\geqslant\frac{\delta}{8}\Big\}$$

$$\leqslant\frac{1}{h}\,\frac{\delta^2}{\delta^2-64h}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi h}}\int_{|u|\geqslant\delta/8}\exp\Big(-\frac{u^2}{2h}\Big)\mathrm{d}u$$

$$\leqslant c\int_{|v|\geqslant\delta/(8\sqrt{h})}v^2\exp(-v^2/2)\mathrm{d}v\to 0\quad(h\to 0).$$

这就得证 $\{Y_n\}$ 是一致胎紧的. 证毕.

定理 7.6 可以看作是 Donsker 定理的一般化. 由此,还可写出一些特殊情形的结论,例如

推论 7.1 设 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是 i.i.d. r.v. 列,X 有非退化分布 $F(x)$,欲有常数 $b_n(>0)$ 及 a_n,使对

$$W_n(t) = \frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{[nt]}(X_j - a_n), \quad 0 < t < 1,$$

有 $W_n \xrightarrow{d} W$ 成立的充要条件是

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N^2\int_{|x|>N}\mathrm{d}F(x)}{\int_{|x|<N}x^2\mathrm{d}F(x)} = 0.$$

注 7.2 在 §6 和 §7 中,我们在 $D[0,1]$ 空间中引入 Skorohod 拓扑的基础上给出了 D 空间中概率测度一致胎紧的充要条件,由此导出了部分和过程弱收敛的充要条件. 另一方面,有若干作者如 Dudley,Hoffman Jørgensen 等引入了"外积分"的概念,建立了新的现代弱收敛理论. 它进一步发展了经典弱收敛理论,不仅适用于经验过程且能应用于集与函数指标的现代经验过程等更为广泛的情形. 读者可参阅 Vaart 和 Wellner 的专著 Weak Convergence and Empirical Processes: With Applications to Statistics, Springer, 1996.

§8 经验过程的弱收敛性

8.1 Brown 桥与经验分布

C 的一个随机元 X 称为 Gauss 的,若 X 的一切有限维分布是正态的. 易见 Gauss 随机元 X 的分布由它的均值 $EX(t)$ 及相关矩 $EX(s)X(t)$ 所完全确定. Wiener 过程 W 是一特殊的 Gauss 随机元,此时

$$EW(t) = 0,\ EW(s)W(t) = \min(s,t). \tag{8.1}$$

另一类重要的 Gauss 随机元是 Brown 桥 B:

$$EB(t) = 0,\ EB(s)B(t) = s(1-t)\ (0 \leqslant s < t \leqslant 1). \tag{8.2}$$

它与 Wiener 过程有着密切的关系. 事实上

$$B(t) = W(t) - tW(1). \tag{8.3}$$

我们也可用(8.3)定义 Brown 桥.

Brown 桥有性质:

$$B(0) = B(1) = 0 \quad \text{a.s.}$$

由(8.2)可得

$$E(B(t)-B(s))^2=(t-s)(1-(t-s)),\quad s<t.$$

且当 $s_1\leqslant s_2<t_1\leqslant t_2$ 时

$$E(B(s_2)-B(s_1))(B(t_2)-B(t_1))=-(s_2-s_1)(t_2-t_1).$$

此外，可以证明

$$P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}B(t)\leqslant y\right\}=1-e^{-2y^2}\qquad(y>0),\tag{8.4}$$

$$P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|B(t)|\leqslant y\right\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2y^2}\qquad(y>0).\tag{8.5}$$

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是从总体 X 中抽得的随机样本，按大小顺序排列得 $X_1^*\leqslant X_2^*\leqslant\cdots\leqslant X_n^*$. 样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的经验分布函数

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}I(X_k\leqslant x).$$

若记总体 X 的 d.f. 为 $F(x)$，那么我们有

定理 A　(Glivenco)

$$P\left\{\sup_x|F_n(x)-F(x)|\to 0\right\}=1.$$

定理 B　(Kolmogorov)　若 $F(x)$ 连续，那么

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\sqrt{n}\sup_x|F_n(x)-F(x)|<y\right\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2y^2}\qquad(y>0).\tag{8.6}$$

定理 C　(Smirnov)　若 $F(x)$ 连续，那么

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\sqrt{n}\sup_x(F_n(x)-F(x))<y\right\}=1-e^{-2y^2}\qquad(y\geqslant 0).\tag{8.7}$$

Doob 在 1949 年就发现 Kolmogorov-Smirnov 统计量的极限分布，即(8.6)，(8.7)与 Brown 桥上确界的分布(8.5)，(8.4)相同，由此他猜测经验过程

$$Z_n(t,\omega)=\sqrt{n}(F_n(t,\omega)-F(t))$$

在一定条件下弱收敛于 Brown 桥 B. 如设总体 X 取值于区间[0,1]，Donsker 于 1952 年证实了这一猜测. 在本节中将给出这一结果的另一证明.

8.2　**部分和最大值的尾概率估计**

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 r.v.，记 $S_0=0$，$S_k=\sum_{j=1}^{k}X_j$　$(k=1,2,\cdots,n)$，

$$M_n=\max_{0\leqslant k\leqslant n}|S_k|,\tag{8.8}$$

$$M_n' = \max_{0\le k\le n}\min\{|S_k|, |S_n - S_k|\}. \tag{8.9}$$

显然 $M_n' \le M_n$. 我们有

引理 8.1 对任一 $\lambda > 0$

$$P\{M_n \ge \lambda\} \le P\{M_n' \ge \lambda/2\} + P\{|S_n| \ge \lambda/2\}. \tag{8.10}$$

证 由于

$$\begin{aligned}|S_k| &\le \min\{|S_n| + |S_k|, |S_n| + |S_n - S_k|\} \\ &= |S_n| + \min\{|S_k|, |S_n - S_k|\},\end{aligned}$$

所以 $M_n \le M_n' + |S_n|$, 这就得证(8.10)成立.

现在来给出 $P\{M_n' \ge \lambda\}$ 的上界的估计.

定理 8.1 设 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 是非负实数, $\gamma \ge 0$, $\alpha > 1/2$. 若对任给 $\lambda > 0$ 及 $0 \le i \le j \le k \le n$ 有

$$P\{|S_j - S_i| \ge \lambda, |S_k - S_j| \ge \lambda\} \le \frac{1}{\lambda^{2\gamma}}\Big(\sum_{i<l\le k} u_l\Big)^{2\alpha}, \tag{8.11}$$

那么对任给 $\lambda > 0$ 有

$$P\{M_n' \ge \lambda\} \le \frac{K_{\gamma,\alpha}}{\lambda^{2\gamma}}(u_1 + \cdots + u_n)^{2\alpha}, \tag{8.12}$$

其中 $K_{\gamma,\alpha}$ 是仅与 γ、α 有关的常数, 可取

$$K_{\gamma,\alpha} = \left[2^{-\frac{1}{2\gamma+1}} - 2^{-\frac{2\alpha}{2\gamma+1}}\right]^{-(2\gamma+1)}.$$

如 $K_{2,1} \approx 55\,021.1$.

证 记 $\delta = (2\gamma + 1)^{-1}$. 由假设 $\alpha > 1/2$, 对充分大的 K 有

$$2^{\delta}(2^{-2\alpha\delta} + K^{-\delta}) \le 1. \tag{8.13}$$

我们来证明当 K 满足(8.13)且 $K \ge 1$ 时, 定理的结论对 $K_{\gamma,\alpha} = K$ 成立. 为此, 对 n 用归纳法. 当 $n = 1$ 时显然. $n = 2$ 时, $M_2' = \min\{|S_1|, |S_2 - S_1|\}$. 由假设(8.11)推得

$$\begin{aligned}P\{M_2' \ge \lambda\} &= P\{|S_1| \ge \lambda, |S_2 - S_1| \ge \lambda\} \\ &\le \frac{1}{\lambda^{2\gamma}}(u_1 + u_2)^{2\alpha} \le \frac{K}{\lambda^{2\gamma}}(u_1 + u_2)^{2\alpha}.\end{aligned}$$

假设对小于 n 的正整数定理成立. 记 $u = \sum_{k=1}^{n} u_k$. 不妨设 $u > 0$, 此时必有 h, $1 \le h \le n$, 使得

$$(u_1 + \cdots + u_{h-1})/u \le 1/2 \le (u_1 + \cdots + u_h)/u, \tag{8.14}$$

当 $h = 1$ 时, 认为左边为 0. 记

$$U_1 = \max_{0\leqslant i\leqslant h} \min\{|S_i|, |S_{h-1} - S_i|\},$$

$$U_2 = \max_{h\leqslant j\leqslant n} \min\{|S_j - S_h|, |(S_n - S_h) - (S_j - S_h)|\},$$

$$D_1 = \min\{|S_{h-1}|, |S_n - S_{h-1}|\},$$

$$D_2 = \min\{|S_h|, |S_n - S_h|\}.$$

首先有

$$M_n' \leqslant \max\{U_1 + D_1, U_2 + D_2\}. \tag{8.15}$$

事实上，我们可以证明

$$\left.\begin{array}{ll} \min\{|S_i|, |S_n - S_i|\} \leqslant U_1 + D_1, & \text{当 } 0 \leqslant i \leqslant h-1, \\ \min\{|S_j|, |S_n - S_j|\} \leqslant U_2 + D_2, & \text{当 } h \leqslant j \leqslant n. \end{array}\right\} \tag{8.16}$$

对前一式，记左边为 μ_i. 那么若 $|S_i| \leqslant U_1$，可得

$$\mu_i \leqslant |S_i| \leqslant U_1 \leqslant U_1 + D_1;$$

若 $|S_{h-1} - S_i| \leqslant U_1$ 且 $D_1 = |S_{h-1}|$，可得

$$\mu_i \leqslant |S_i| \leqslant |S_{h-1} - S_i| + |S_{h-1}| \leqslant U_1 + D_1;$$

若 $|S_{h-1} - S_i| \leqslant U_1$ 且 $D_1 = |S_n - S_{h-1}|$，可得

$$\mu_i \leqslant |S_n - S_i| \leqslant |S_{h-1} - S_i| + |S_n - S_{h-1}| \leqslant U_1 + D_1.$$

这就得证(8.16)前一式成立. 类似地可证后一不等式成立. 而由(8.16)即可推得(8.15)式.

其次，由已证的(8.15)可知，对任给 $\lambda > 0$

$$P\{M_n' \geqslant \lambda\} \leqslant P\{U_1 + D_1 \geqslant \lambda\} + P\{U_2 + D_2 \geqslant \lambda\}.$$

若令 $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$, $\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 > 0$，那么进一步还可写成

$$P\{M_n' \geqslant \lambda\} \leqslant P\{U_1 \geqslant \lambda_0\} + P\{U_2 \geqslant \lambda_0\} + P\{D_1 \geqslant \lambda_1\} + P\{D_2 \geqslant \lambda_1\}. \tag{8.17}$$

注意到 $U_1 = M_{h-1}'$，应用归纳假设于 U_1，并由(8.14)得

$$P\{U_1 \geqslant \lambda_0\} \leqslant \frac{K}{\lambda_0^{2\gamma}}(u_1 + \cdots + u_{h-1})^{2\alpha} \leqslant \frac{u^{2\alpha}}{\lambda_0^{2\gamma}} \cdot \frac{K}{2^{2\alpha}}. \tag{8.18}$$

U_2 与 U_1 类似，只是限于考虑 r.v. $X_{h+1}, \cdots, X_n$，由于 $n - h < n$，所以也可应用归纳假设于 U_2，得

$$P\{U_2 \geqslant \lambda_0\} \leqslant \frac{K}{\lambda_0^{2\gamma}}(u_{h+1} + \cdots + u_n)^{2\alpha} \leqslant \frac{u^{2\alpha}}{\lambda_0^{2\gamma}} \cdot \frac{K}{2^{2\alpha}}. \tag{8.19}$$

对 D_1 和 D_2，由假设(8.11)及它们本身的定义

$$P\{D_1 \geqslant \lambda_1\} = P\{|S_{h-1}| \geqslant \lambda_1, |S_n - S_{h-1}| \geqslant \lambda_1\}$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda_1^{2\gamma}}(u_1 + \cdots + u_n)^{2\alpha} = \frac{u^{2\alpha}}{\lambda_1^{2\gamma}}. \tag{8.20}$$

同样有

$$P\{D_2 \geqslant \lambda\} \leqslant u^{2\alpha}/\lambda^{2\gamma}. \tag{8.21}$$

由(8.18)－(8.21)就得

$$P\{M_n' \geqslant \lambda\} \leqslant 2u^{2\alpha}\left\{\frac{K}{2^{2\alpha}\lambda_0^{2\gamma}} + \frac{1}{\lambda_1^{2\gamma}}\right\}. \tag{8.22}$$

注意到对于正数 C_0, C_1 和 λ 有

$$\min_{\substack{\lambda_0,\lambda_1>0\\ \lambda_0+\lambda_1=\lambda}}\left\{\frac{C_0}{\lambda_0^{2\gamma}} + \frac{C_1}{\lambda_1^{2\gamma}}\right\} = \frac{1}{\lambda^{2\gamma}}(C_0^\delta + C_1^\delta)^{\delta^{-1}}, \tag{8.23}$$

其中 $\delta = (2\gamma+1)^{-1}$. 令 $C_0 = K/2^{2\alpha}, C_1 = 1$, 代入(8.22)就得证

$$P\{M_n' \geqslant \lambda\} \leqslant \frac{u^{2\alpha}}{\lambda^{2\gamma}} \cdot 2[(K2^{-2\alpha})^\delta + 1]^{\delta^{-1}}.$$

由(8.13)确定的 K 使上式右边 $\leqslant Ku^{2\alpha}/\lambda^{2\gamma}$. 证毕.

注 8.1　定理证明中并未要求 r.v. $\{X_n\}$ 具有独立性,所以定理的结果对于任何 r.v. 均适用. 条件(8.11)式不易验证,在应用中常用较强但易于验证的矩条件

$$E\{|S_j - S_i|^\gamma |S_k - S_j|^\gamma\} \leqslant \left(\sum_{i<l\leqslant k} u_l\right)^{2\alpha} \tag{8.24}$$

代替. 注意到对非负实数 x, y 有 $xy \leqslant (x+y)^2$, 所以(8.24)也可换成更强的矩条件

$$E\{|S_j - S_i|^\gamma |S_k - S_j|^\gamma\} \leqslant \left(\sum_{i<l\leqslant j} u_l\right)^\alpha \left(\sum_{j<l\leqslant k} u_l\right)^\alpha. \tag{8.25}$$

8.3　**经验过程的弱收敛**

这里仅限于讨论服从[0,1]上均匀分布的总体,此时总体 X 的 d.f. $F(t) = t(0 \leqslant t \leqslant 1)$. 经验过程

$$Y_n(t,\omega) = \sqrt{n}(F_n(t,\omega) - t) = \sqrt{n}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I(X_i(\omega) \leqslant t) - t\right\} \tag{8.26}$$

是 D 的随机元. 为使修正后属于 C, 作 $G_n(t,\omega)$ 如下: 记 $X_1^*, X_2^*, \cdots, X_n^*$ 是样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的次序统计量, $X_0^* = 0$, $X_{n+1}^* = 1$, $G_n(X_i^*,\omega) = i/(n+1)(i = 0,1,\cdots,n+1)$, 在其余处为线性, 所以

$$G_n(t,\omega) = \frac{1}{n+1}\left\{\sum_{i=1}^n I(X_i(\omega) \leqslant t) + \frac{t - \max(X_i; X_i \leqslant t)}{\min(X_i; X_i > t) - \max(X_i; X_i \leqslant t)}\right\}.$$

现在

$$W_n(t,\omega) = \sqrt{n}\,(G_n(t,\omega) - t)$$

是 C 上的随机元. 由于在 $X_i^*(\omega)$ 上

$$G_n(X_i^*,\omega) - F_n(X_i^*,\omega) = \left|\frac{i}{n+1} - \frac{i}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n},$$

所以

$$|G_n(t,\omega) - F_n(t,\omega)| \leqslant 1/n \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

$$\sup_t |Y_n(t,\omega) - W_n(t,\omega)| \leqslant 1/\sqrt{n}. \tag{8.27}$$

我们有

定理 8.2 设 $\{X_n\}$ 是 i.i.d.r.v. 列, X_1 服从 $[0,1]$ 上均匀分布, 那么

$$W_n \xrightarrow{d} B, \quad Y_n \xrightarrow{d} B. \tag{8.28}$$

证 由(8.27)知只需证(8.28)中两式之一成立.

1° W_n 的有限维分布弱收敛于 B 对应的有限维分布.

记 $U_n(t,\omega) = nF_n(t,\omega)$, 它是 $X_1,\cdots,X_n$ 中满足 $X_i(\omega) \leqslant t$ 的个数, 所以 r.v. $U_n(t_i) - U_n(t_{i-1})$ 是 $X_1,\cdots,X_n$ 中满足 $t_{i-1} < X_j(\omega) \leqslant t_i$ 的个数 $(0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1)$, 它服从参数为 $n, p_i = t_i - t_{i-1}\ (i = 1,\cdots,k)$ 的多项分布, 其方差为 $p_i(1-p_i)$, 协方差为 $-p_ip_j$. 由关于多项试验的中心极限定理得分量为

$$Y_n(t_i) - Y_n(t_{i-1}) = \frac{1}{\sqrt{n}}(U_n(t_i) - U_n(t_{i-1}) - np_i), \quad i = 1,\cdots,k$$

的随机向量依分布收敛于分量为 $B(t_i) - B(t_{i-1})$ 的随机向量. 由(8.27), 对于 $W_n(t_i) - W_n(t_{i-1})$ 有同样的极限分布.

2° $\{W_n\}$ 是一致胎紧的.

因 $W_n, B \in C$, 所以由定理 5.3 只需证明对任给的 $\varepsilon > 0, \eta > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon,\eta)$ $(0 < \delta < 1)$ 和 n_0 使当 $n \geqslant n_0$ 时有

$$P\left\{\sup_{t\leqslant s\leqslant t+\delta} |W_n(s) - W_n(t)| \geqslant \varepsilon\right\} < \delta\eta. \tag{8.29}$$

而由(8.27), 只需证明

$$P\left\{\sup_{t\leqslant s\leqslant t+\delta} |Y_n(s) - Y_n(t)| \geqslant \varepsilon\right\} < \delta\eta. \tag{8.30}$$

由于 $Y_n(t)$ 的增量的分布在参数 t 的平移变换下不变, 所以不失一般性可设 $t = 0$, 即只需证明

$$P\left\{\sup_{0\leqslant s\leqslant \delta} |Y_n(s)| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \delta\eta. \tag{8.31}$$

对于固定的 δ, 令定理 8.1 中的 $\gamma = 2$, $\alpha = 1$, $u_i = \sqrt{6}\,\delta/m$, $X_i =$

$Y_n(i\delta/m) - Y_n((i-1)\delta/m)$. 由注 8.1,若能证明

$$E(|Y_n(s+p_1) - Y_n(s)|^2 |Y_n(s+p_1+p_2) - Y_n(s+p_1)|^2) \leqslant 6p_1p_2, \tag{8.32}$$

按定理 8.1 就有

$$P\{M'_m \geqslant \varepsilon\} \geqslant \frac{6K}{\varepsilon^4}\delta^2, \tag{8.33}$$

其中 $M'_m = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \min\{|Y_n(i\delta/m)|, |Y_n(\delta) - Y_n(i\delta/m)|\}$. 由此从引理 8.1 就有

$$P\{M_m \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{96K}{\varepsilon^4}\delta^2 + P\left\{|Y_n(\delta)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}, \tag{8.34}$$

其中 $M_m = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} |Y_n(i\delta/m)|$. 因为对每一 ω, $Y_n(s,\omega)$ 关于 s 右连续,故当 $m\to\infty$ 时,M_m 趋于 $\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant\delta}|Y_n(s,\omega)|$. 这样,从(8.34)即可推得

$$P\left\{\sup_{0\leqslant s\leqslant\delta}|Y_n(s)| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \frac{96K}{\varepsilon^4}\delta^2 + P\left\{|Y_n(\delta)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \tag{8.35}$$

因为当 $n\to\infty$ 时,$Y_n(\delta)$ 弱收敛于正态分布 $N(0,\delta(1-\delta))$,所以

$$\begin{aligned} P\{|Y_n(\delta)| \geqslant \varepsilon/2\} &\to P\{N \geqslant \varepsilon/(2\sqrt{\delta(1-\delta)})\} \\ &\leqslant (16\delta^2/\varepsilon^4)EN^4 = 48\delta^2/\varepsilon^4. \end{aligned}$$

即得当 $n \geqslant n_\delta$ 时

$$P\{|Y_n(\delta)| \geqslant \varepsilon/2\} \leqslant 96\delta^2/\varepsilon^4.$$

代入(8.35)得

$$P\{\sup_{0\leqslant s\leqslant\delta}|Y_n(s)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant 96(K+1)\delta^2/\varepsilon^4. \tag{8.36}$$

对于给定的 $\varepsilon>0,\eta>0$,选 δ 使得 $96(K+1)\delta/\varepsilon^4<\eta$,就得证(8.31)式成立.

余下来证(8.32)式成立. 记 $p=t-s$,注意到

$$\begin{aligned} Y_n(t) - Y_n(s) &= \frac{1}{\sqrt{n}}(U_n(t) - U_n(s) - np) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}(k-np) = \frac{1}{\sqrt{n}}[k(1-p) - (n-k)p], \end{aligned}$$

其中 k 是样本 $X_1,\cdots,X_n$ 落入 $(s,t]$ 的个数. 若记

$$\alpha_i = \begin{cases} 1-p_1, & \text{当 } X_i \in (s, s+p_1], \\ -p_1, & \text{其他}; \end{cases}$$

$$\beta_i = \begin{cases} 1-p_2, & \text{当 } X_i \in (s+p_1, s+p_1+p_2], \\ -p_2, & \text{其他}. \end{cases}$$

那么(8.32)就是

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\right)^2\right]\leqslant 6n^2p_1p_2. \tag{8.37}$$

因为 $\{X_k\}$ 独立，故 $\{(\alpha_k,\beta_k),k=1,2,\cdots,n\}$ 相互独立. 又因 X_k 服从 $[0,1]$ 中均匀分布，所以 (α_k,β_k) 取值 $(1-p_1,-p_2)$，$(-p_1,1-p_2)$，$(-p_1,-p_2)$ 的概率各为 p_1,p_2 和 $p_3\overset{\text{def}}{=}1-p_1-p_2$. 由于 $E\alpha_k=0$，$E\beta_k=0$，并注意到对称性，得

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\right)^2\right]=nE\alpha_1^2\beta_1^2+n(n-1)E\alpha_1^2E\beta_2^2$$
$$+2n(n-1)E\alpha_1\beta_1E\alpha_2\beta_2,$$

而

$$E\alpha_1^2\beta_1^2=(1-p_1)^2p_2^2p_1+p_1^2(1-p_2)^2p_2+p_1^2p_2^2p_3\leqslant 3p_1p_2,$$
$$E\alpha_1^2E\beta_1^2=p_1(1-p_1)p_2(1-p_2)\leqslant p_1p_2,$$
$$E\alpha_1\beta_1E\alpha_2\beta_2=p_1^2p_2^2\leqslant p_1p_2,$$

代入即得(8.37)式成立. 证毕.

习　　题

1. 设 $\mathscr{A}$ 是确定类，若对任一 $A\in\mathscr{A}$，$P_n(A)\to Q(A)$，且 $P_n\Rightarrow P$，证明未必有 $P=Q$.

（提示：取 $S=(-\infty,\infty)$，$\rho(x,y)=|x-y|$，$P(\{0\})=P(\{1\})=1/2$，$P_n(\{n^{-1}\})=P_n(\{1+n^{-1}\})=1/2$，$Q(\{0\})=1$. 又令 $B=\{0,1,n^{-1},1+n^{-1};n=1,2,\cdots\}$. $\mathscr{A}=\{A:AB$ 为有限点集且 $0\in A$ 或 A^cB 为有限点集且 $0\notin A^c\}$.）

2. 设 $k>1$，k 元 d.f. F 的不连续点都在可列个形如 $x_i=a$ 的超平面上. 又对任何可列个超平面 $x_i=a_{ij}$ $(j=1,2,\cdots;i=1,2,\cdots,k)$，存在一个 k 元 d.f. F 使它的不连续点都在这些超平面上，而在其余点上连续.

当 $k>1$ 时，k 元 d.f. F 的不连续点集不一定是可列集.

3. 设 $F_n\xrightarrow{d}F$. 若 F 在闭集 A 上处处连续，则

$$\sup_{x\in A}|F_n(x)-F(x)|\to 0.$$

4. 两个一元 d.f. 的 Levy 距离定义为

$$L(F,G)=\inf\{\varepsilon,\text{对任一 }x,\ F(x-\varepsilon)-\varepsilon\leqslant G(x)\leqslant F(x+\varepsilon)+\varepsilon\}.$$

试证一元 d.f. 全体 S_F^1 关于距离 $L(F,G)$ 是一个可分完备的度量空间，$L(F_n,F)\to 0$ 当且仅当 $F_n\xrightarrow{d}F$.

5. 用 §3 的方法证明：对于 r.v.，若 $X_n \xrightarrow{d} X$，$Y_n \xrightarrow{P} 0$，那么 $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X$、$X_nY_n \xrightarrow{P} 0$.

6. 证明对于随机向量 X_n, Y_n, X 及 r.v. Z_n，

(a) 若 $X_n \xrightarrow{d} X$，$|X_n - Y_n| \leqslant Z_n|X_n|$，$Z_n \xrightarrow{P} 0$，则 $Y_n \xrightarrow{d} X$；

(b) 若 $X_n \xrightarrow{d} X$，$|X_n - Y_n| \leqslant Z_n|Y_n|$，$Z_n \xrightarrow{P} 0$，则 $Y_n \xrightarrow{d} X$.

（提示：从 $|x-y| < \epsilon y$，$\epsilon < 1/2$ 可得 $|x - y| \leqslant 2\epsilon|x|$，(b) 就归结成 (a).）

7. 若度量空间 S 是可分完备的，随机元 $X_n \xrightarrow{P} X$，g 是 S 到 S 上的连续映射，试证 $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$.

8. 证明 r.v. 列 $\{X, X_n; n = 1,2,\cdots\}$ 满足 $X_n \xrightarrow{d} X$ 当且仅当对任何一元连续 d.f. $F(x)$ 有 $E(F(X_n)) \to E(F(X))$.（也即对任一与 $\{X, X_n; n \geqslant 1\}$ 独立且有连续 d.f. 的 r.v. Y 有 $P\{Y < X_n\} \to P\{Y < X\}$.）

9. 若 Π 为一致胎紧的，那么 Π 中概率测度 P 有共同的 σ 紧的支撑.

10. 设集 $A \subset$ 度量空间 S，$P_a(\{a\}) = 1$，记 $\Pi = \{P_a; a \in A\}$，那么 Π 是弱相对紧的充要条件是 A 为紧集.

11. 正态分布族 $\{N(a,\sigma^2); (a,\sigma^2) \in A\}$ 是一致胎紧的当且仅当 A 是 $\mathbf{R}^2$ 中的有界集.

12. 设 Π 是度量可测空间 $(S, \rho, \mathscr{B})$ 上一致胎紧的概率测度族，$S_0 \in \mathscr{B}$，对任一 $P \in \Pi$，$P(S_0) = 1$，将 Π 局限于 $(S_0, \mathscr{B}_0)$ 上得 Π'，其中 $\mathscr{B}_0 = S_0 \cap \mathscr{B}$. 问 $(S_0, \mathscr{B}_0)$ 上的概率测度族 Π' 是否必为紧的？

（提示：考察 $S = [0,1]$，$S_0 = (0,1)$，$\Pi = \{P_a; 0 < a < 1\}$.）

13. 若对某 $\delta > 0$，$\{|X_n|^\delta\}$ 一致可积，则 $\{X_n\}$ 是一致胎紧的.

14. 设 $X(t) = t\xi$，r.v. ξ 满足 $P\{|\xi| \geqslant a\} \sim a^{-1/2}$（当 $a \to \infty$），设 P_n 都重合于 X 的分布 P_X，则 $\{P_n\}$ 是一致胎紧的，但不满足定理 4.3 的条件(ii).

15. 设 $\{X_{nk}; 1 \leqslant k \leqslant k_n, n \geqslant 1\}$ 是独立 r.v. 组列，$EX_{nk} = 0$，$\mathrm{Var}X_{nk} = \sigma_{nk}^2$. 记

$$S_{nk} = \sum_{i=1}^{k} X_{ni},\ b_{nk}^2 = \sum_{i=1}^{k} \sigma_{ni}^2,\ b_n^2 = b_{nk_n}^2,$$

$$W_n(t) = \frac{1}{b_n}\left\{S_{nk} + \frac{tb_n^2 - b_{nk}^2}{b_{n,k+1}^2 - b_{nk}^2} X_{n,k+1}\right\},\quad \text{当 } b_{nk}^2 \leqslant tb_n^2 \leqslant b_{n,k+1}^2.$$

若对任给 $\varepsilon > 0$，

$$b_n^{-2}\sum_{k=1}^{k_n}\int_{|X_{nk}|\geqslant \varepsilon b_n} X_{nk}^2 \mathrm{d}P \to 0,$$

那么 $W_n \xrightarrow{d} W$.

16. 设独立 r. v. 列 $\{X_n\}$ 所产生的部分和过程 $W_n \xrightarrow{d} W$，则对任给 $\varepsilon > 0$，有 $\lambda \geqslant 1$ 和 n_0，使当 $n \geqslant n_0$ 时有

$$P\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} |S_i| \geqslant \lambda B_n\right\} \leqslant \varepsilon/\lambda^2,$$

其中 $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}X_k$.

17. 试给出引理 6.2 的证明.

18. 试对 $\{X_n\}$ 为相互独立 r. v. 列情形，给出由它所产生的部分和过程 W_n 弱收敛于 W 的充要条件.

19. 设 $\{X_n\}$ 是独立 r. v. 列，$EX_n = 0$，$EX_k^2 = \sigma_k^2$. 记 $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2 \uparrow \infty$. 若 $\{X_n\}$ 满足 Lindeberg 条件：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\geqslant \varepsilon B_n} x^2 dF_k(x) = 0,$$

试利用定理 8.1 证明对任给 $\varepsilon > 0$，有充分大 λ 及 n_0 使当 $n \geqslant n_0$ 时

$$P\{M_n \geqslant \lambda B_n\} \leqslant \varepsilon/\lambda^2.$$

20. 若对某 $\gamma \geqslant 0, \alpha > 1$，对任何 $\lambda > 0$ 及 $0 \leqslant i < j \leqslant n$ 有

$$P\{|S_j - S_i| \geqslant \lambda\} \leqslant \frac{1}{\lambda^\gamma}\Big(\sum_{i<l\leqslant j} u_l\Big)^\alpha,$$

其中 $\{u_l\}$ 是正常数. 试证有常数 $K > 0$ 使

$$P\{M_n \geqslant \lambda\} \leqslant \frac{K}{\lambda^\gamma}(u_1 + \cdots + u_n)^\alpha.$$

（提示：利用 $P(E_1E_2) \leqslant \sqrt{P(E_1)P(E_2)}$ 及定理 8.1.）

21. 设 C 中随机元序列 $\{X_n\}$ 满足：

(i) $\{X_n(0)\}$ 是胎紧的；

(ii) 存在常数 $\gamma \geqslant 0, \alpha > 1$ 及 $[0,1]$ 上连续不减的函数 $F(t)$，使对任何 $t_1, t_2 \in [0,1]$，对一切 n 和 $\lambda > 0$ 成立

$$P\{|X_n(t_2) - X_n(t_1)| \geqslant \lambda\} \leqslant \frac{1}{\lambda^\gamma}|F(t_2) - F(t_1)|^\alpha,$$

则 $\{X_n\}$ 是一致胎紧的.

（提示：利用 20 题及定理 5.3′.）

22. 设$\{X_n\}$是i.i.d.r.v.列，$0 \leqslant X_n(\omega) \leqslant 1$ (a.s.)，X服从连续的d.f. $F(t)$. 试证经验过程

$$Y_n(t,\omega) = \sqrt{n}\,(F_n(t,\omega) - F(t))$$

弱收敛于Gauss随机元Y，$EY(t) = 0$，$EY(s)Y(t) = F(s)(1 - F(t))$ $(s \leqslant t)$，其中$F_n(t,\omega)$是$X_1(\omega),\cdots,X_n(\omega)$的经验分布.

(提示：考察$\eta_n = F(X_n)$，它是i.i.d.r.v.列，对它应用定理8.2，然后证明D到D的映射$\Psi: x \mapsto \Psi(x) = x(F(t))$是连续的.)

第五章　强不变原理

在上一章中，我们给出了Donsker不变原理及它的一般化。进一步自然要求考察对于给定的i.i.d.r.v.列$\{X_n\}$所产生的部分和过程列$\{W_n(t);0\leqslant t\leqslant 1\}$与Wiener过程$\{W(t);0\leqslant t\leqslant 1\}$的样本轨道之间的关系，如距离$\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|W_n(t)-W(t)|$的极限性状是怎样的？是否依概率趋于0，是否a.s.趋于0等. 这类问题的一般提法是：对于部分和过程$\{W_n(t);0\leqslant t\leqslant 1\}$，是否存在一个概率空间，在其上存在一个Wiener过程$\{W(t);0\leqslant t\leqslant 1\}$及一个与$\{W_n(t);0\leqslant t\leqslant 1\}$同分布的部分和过程列$\{\tilde{W}_n(t);0\leqslant t\leqslant 1\}$使得当$n\to\infty$时

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\tilde{W}_n(t)-W(t)|\to 0\quad (P\text{ 或 a.s.}).$$

早在1964年，这一问题已被Strassen所解决，他获得较上述问题更强的结论，这就是著名的

Strassen强不变原理　设i.i.d.r.v.列$\{X_n;n\geqslant 1\}$，$EX_1=0$，$EX_1^2=1$. 那么当$n\to\infty$时

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}(n\log\log n)^{-1/2}|\tilde{S}_{[nt]}-W(nt)|\to 0\quad \text{a.s.},$$

其中$\{\tilde{S}_n;n\geqslant 1\}$与$\{S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i;n\geqslant 1\}$同分布.

在这一章中，我们将讨论Strassen强不变原理及与之有关的一些基本结果. 为此，首先在§1给出Wiener过程存在的一个构造性证明. 在§2介绍于70年代后期由匈牙利学派提出并作了细微讨论的关于Wiener过程的增量的大小. 由此，在§3就可比较容易地导出Wiener过程的重对数律. 为了证明Strassen强不变原理，我们在§4介绍了重要的Skorohod嵌入定理，这也是60年代初概率论的一个杰出成果，它是讨论有关问题的一个有效的手段. 最后，在§5介绍了i.i.d.r.v.列的部分和用Wiener过程的强逼近及由此导出的Strassen强不变原理.

§1　Wiener过程及其基本性质

1.1　Wiener过程的存在性

在上一章的§4，我们在$C=C[0,1]$空间中引入过Wiener测度，并称它

所对应的随机函数为 Wiener 过程 $W = \{W(t); 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. 下面我们给出 Wiener 过程的直接定义.

定义 1.1　概率空间 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ 上的随机过程 $\{W(t,\omega); t \geqslant 0\}$ 称为 Wiener 过程,若它满足:

(i) 对任一 $\omega \in \Omega$, $W(0,\omega) \equiv 0$, 且对 $0 \leqslant s \leqslant t$, $W(t) - W(s)$ 服从正态分布 $N(0, t-s)$;

(ii) 样本函数 $W(t,\omega)$ 概率为 1 地是 $[0,\infty)$ 上的连续函数;

(iii) 对 $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 < t_4 \leqslant \cdots \leqslant t_{2n-1} < t_{2n}$, 增量

$$W(t_2) - W(t_1),\ W(t_4) - W(t_3), \cdots, W(t_{2n}) - W(t_{2n-1})$$

是相互独立的随机变量.

如只限于 $0 \leqslant t \leqslant 1$, 则由 Wiener 过程 $\{W(t,\omega); 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ 引入于度量空间 (C, ρ) 上的概率测度就是上一章 §4 的 Wiener 测度.

下面通过参数变换产生的过程

$$\tilde{W}(t) = \begin{cases} tW(1/t), & 当\ t > 0, \\ 0, & 当\ t = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

仍然是 Wiener 过程. 事实上,定义 1.1 中的条件(i)和(ii)是显然的. 现在验证(iii). 对 $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_{2n-1} < t_{2n}$,

$$\tilde{W}(t_2) - \tilde{W}(t_1) = t_2 W(t_2^{-1}) - t_1 W(t_1^{-1}),$$

$$\cdots\cdots$$

$$\tilde{W}(t_{2n}) - \tilde{W}(t_{2n-1}) = t_{2n} W(t_{2n}^{-1}) - t_{2n-1} W(t_{2n-1}^{-1}),$$

是 n 元正态 r.v., 由于当 $l < k$ 时, $t_{2l} < t_{2k-1} \leqslant t_{2l} < t_{2l-1}$, 所以它们的协方差

$$\begin{aligned} & E(\tilde{W}(t_{2l}) - \tilde{W}(t_{2l-1}))(\tilde{W}(t_{2k}) - \tilde{W}(t_{2k-1})) \\ & = t_{2k}t_{2l}t_{2k}^{-1} - t_{2k}t_{2l-1}t_{2k}^{-1} - t_{2k-1}t_{2l}t_{2k-1}^{-1} + t_{2k-1}t_{2l-1}t_{2k-1}^{-1} \\ & = 0, \end{aligned}$$

也即 $\tilde{W}(\cdot)$ 具有独立增量. 因此 $\tilde{W}(\cdot)$ 是一 Wiener 过程.

下面将给出 Wiener 过程存在的一个构造性证明.

设 $\{r_n\}$ 是 $[0,\infty)$ 中全体 2 进制有理数, $\{X_{r_n}\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ 上相互独立、服从标准正态分布的 r.v. 列. 定义

$$W(k) = \sum_{j}^{k} X_j,$$

$$W\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}[W(k) + W(k+1)] + \frac{1}{\sqrt{4}} X_{k+1/2}.$$

设对 $k = 1, 2, \cdots; n = 1, 2, \cdots, n_0$ 已定义 $W(k/2^n)$, 那么对 $k = 1, 2, \cdots, n -$

n_0+1，令

$$W\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)=\frac{1}{2}\left[W\left(\frac{2k}{2^n}\right)+W\left(\frac{2k+2}{2^n}\right)\right]+\frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}}X_{(2k+1)2^n}.$$

这样归纳地对一切 r_n，定义 $W(r_n)$. 现在对任给 $t>0$，表 t 为二进制形式：

$$0<t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_k(t)}{2^k},$$

其中 $\varepsilon_0(t)=0,1,2,\cdots;\varepsilon_k(t)=0,1;\ k=1,2,\cdots$，且从某一 k 起 $\varepsilon_k(t)$ 将不恒等于 1. 记 $t_n=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k(t)/2^k,\ n=0,1,2,\cdots$. 定义

$$W(t)\overset{\text{a.s.}}{=}\lim_{n\to\infty}W([2^n t]/2^n)=\lim_{n\to\infty}W(t_n)$$

$$=W(\varepsilon_0(t))+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(W(t_k)-W(t_{k-1})). \tag{1.2}$$

如果我们能证明上述级数概率为1地收敛，且例外集与 t 无关，即有与 t 无关的 $\Omega_0^c,P(\Omega_0^c)=0$，当 $\omega\in\Omega_0$ 时，(1.2) 中的极限存在且有限，那么随机过程 $\{W(t,\omega);t\geqslant 0\}$ 就概率为1地被定义. 由正态分布性质可知，这样定义的过程满足(i) 和(iii). 事实上，设 $0\leqslant t_1<t_2\leqslant t_3<t_4$，对任给的正整数 n，记

$$t_{k,n}=[2^n t_k]/2^n=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_{k,i}(t_k)/2^i,\quad k=1,2,3,4.$$

由定义可知 $\{W(t_{k,n});\ k=1,2,3,4\}$ 是正态 r.v.，对 n 用归纳法可以证明对任何非负整数 $j\leqslant l$ 有

$$EW(j/2^n)W(l/2^n)=j/2^n,$$

由此即得

$$E(W(t_{2,n})-W(t_{1,n}))(W(t_{4,n})-W(t_{3,n}))=0.$$

当(1.2) 成立时，$W(t_{k,n})$ 依分布收敛于 $W(t_k)$. 由正态分布族的性质即得

$$\begin{aligned}&E[W(t_2)-W(t_1)][W(t_4)-W(t_3)]\\&=\lim_{n\to\infty}E[W(t_{2,n})-W(t_{1,n})][W(t_{4,n})-W(t_{3,n})]\\&=0.\end{aligned}$$

因此，为证 $\{W(t);t\geqslant 0\}$ 是 Wiener 过程，余下只需证明级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(W(t_k)-W(t_{k-1}))$ 是 a.s. 收敛的，且概率为1地样本函数 $W(\cdot,\omega)$ 是连续的. 对于前者我们将证明更为一般的下述引理.

引理 1.1 $\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|W(t_k)-W(t_{k-1})|<\infty$ a.s.

证 对任给的 $C>1$，记 $u_k=C\sqrt{2k\log 2}$. 由正态分布的尾概率估计，我

们有

$$P\Big\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|W(t_k)-W(t_{k-1})|\geqslant u_k/\sqrt{2^k}\Big\}$$
$$\leqslant 2^k P\{|W(1/2^k)|\geqslant u_k/\sqrt{2^k}\}$$
$$\leqslant 2^k e^{-u_k^2/2}=2^{k-kC^2}.$$

注意到 $L=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{2k\log 2}{2^k}}<\infty$，而当 $C\to\infty$ 时

$$P\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|W(t_k)-W(t_{k-1})|\geqslant CL\Big\}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-kC^2}=\frac{1}{2^{C^2-1}-1}\to 0,$$

这就得证引理 1.1 成立.

为证由(1.2)定义的随机过程满足定义 1.1 中的条件(ii)，我们在下一段将进一步讨论这一过程的样本函数的连续模. 在下一节关于 Wiener 过程增量大小的研究中，有关结果还将被用到.

1.2　Lévy 关于 Wiener 过程的连续模定理

为证连续模定理，我们先证一个十分重要的引理，它是关于 Wiener 过程增量的尾概率的估计(注：下一引理的证明未用到条件(ii)).

引理 1.2　设 $W(t)$ 定义如(1.2)，则对任给 $\varepsilon>0$，存在 $C=C(\varepsilon)>0$，使对每一 $v>0$ 及 $h<1$ 有

$$P\Big\{\sup_{0\leqslant s\leqslant 1-h}\sup_{0\leqslant t\leqslant h}|W(s+t)-W(s)|\geqslant v\sqrt{h}\Big\}\leqslant\frac{C}{h}e^{-\frac{v^2}{2+\varepsilon}}.\tag{1.3}$$

证　对正实数 s 和正整数 r，记 $s_r=[2^r s]/2^r=\sum\limits_{j=0}^{r}\varepsilon_j(s)/2^j$，$R=2^r$. 对每一 $\omega\in\Omega$，固定的 s,t,r 有

$$|W(s+t)-W(s)|\leqslant|W(s+t)-W((s+t)_r)|$$
$$+|W((s+t)_r)-W(s_r)|+|W(s_r)-W(s)|$$
$$\leqslant|W((s+t)_r)-W(s_r)|+\sum_{j=0}^{\infty}|W((s+t)_{r+j+1})-W((s+t)_{r+j})|$$
$$+\sum_{j=0}^{\infty}|W(s_{r+j+1})-W(s_{r+j})|.$$

因为 $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant h}|(s+t)_r-s_r|\leqslant h+R^{-1}$，$\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant h}|(s+t)_{r+j+1}-(s+t)_{r+j}|\leqslant 2^{-(r+j+1)}$，且 $W((s+t)_r)-W(s_r)$ 服从正态分布 $N(0,(s+t)_r-s_r)$，所以对 $u>0$ 及 $x_j>0$，我们有

$$P\Big\{\sup_{0\leqslant s\leqslant 1-h}\sup_{0\leqslant t\leqslant h}|W((s+t)_r)-W(s_r)|\geqslant u\sqrt{h+R^{-1}}\Big\}$$
$$\leqslant 2R(Rh+1)e^{-u^2/2},$$

$$P\left\{\sup_{0\leqslant s\leqslant 1-h}\sup_{0\leqslant t\leqslant h}|W((s+t)_{r,j+1})-W((s+t)_{r,j})|\geqslant \frac{x_j}{\sqrt{2^{r+j+1}}}\right\}$$

$$< 2\cdot 2^{r+j+1}e^{-x_j^2/2},$$

$$P\left\{\sup_{0\leqslant s\leqslant 1-h}\sup_{0\leqslant t\leqslant h}|W(s_{r,j+1})-W(s_{r,j})|\geqslant \frac{x_j}{\sqrt{2^{r+j+1}}}\right\}$$

$$\leqslant 2\cdot 2^{r+j+1}e^{-x_j^2/2}.$$

由此即可推得

$$P\left\{\sup_{0\leqslant s\leqslant 1}\sup_{0\leqslant t\leqslant h}|W(s+t)-W(s)|\geqslant u\sqrt{h+R^{-1}}+2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x_j}{\sqrt{2^{r+j+1}}}\right\}$$

$$\leqslant 2R(Rh+1)e^{-u^2/2}+8R\sum_{j=0}^{\infty}2^j e^{-x_j^2/2}. \tag{1.4}$$

令 $x_j=\sqrt{2j+u^2}$. 对给定的 $K=K(\varepsilon)$(待下面确定),取 R 使 $R\leqslant K/h<2R$,那么

$$8R\sum_{j=0}^{\infty}2^j e^{-x_j^2/2}\leqslant \frac{8K}{h}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^j e^{-u^2/2}=\frac{AK}{h}e^{-u^2/2},$$

其中 $A=8\sum\limits_{j=0}^{\infty}(2/e)^j$. 又

$$u\sqrt{h+R^{-1}}+2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x_j}{\sqrt{2^{r+j+1}}}$$

$$\leqslant u\sqrt{h+R^{-1}}+2\sqrt{\frac{h}{K}}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\sqrt{\frac{2j}{2^j}}+u\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2^j}}\right]$$

$$<\sqrt{h}\left\{u\left(\sqrt{1+2/K}+2G\sqrt{1/K}\right)+2B\sqrt{1/K}\right\},$$

其中 $B=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sqrt{2j/2^j}$, $G=\sum\limits_{j=0}^{\infty}(\sqrt{2^j})^{-1}$. 如记 $v=2B\sqrt{1/K}+u(\sqrt{1+2/K}+2G\sqrt{1/K})$,那么由(1.4)式就得

$$P\left\{\sup_{0\leqslant s\leqslant 1}\sup_{0\leqslant t\leqslant h}|W(s+t)-W(s)|\geqslant v\sqrt{h}\right\}$$

$$\leqslant\left(\frac{2K}{h}(K+1)+\frac{AK}{h}\right)e^{-u^2/2}\leqslant\frac{C_1}{h}e^{-v^2/(2+\varepsilon)},$$

其中 $C_1=C_1(\varepsilon)$. 后一不等式是由于对于给定的 $\varepsilon>0$,当取 $K=K(\varepsilon)$ 适当大时,可使

$$u=\frac{v-2B\sqrt{1/K}}{\sqrt{1+2/K}+2G\sqrt{1/K}}\geqslant\frac{v}{\sqrt{1+\varepsilon/2}}$$

对一切 $v\geqslant 1$ 成立. 因此(1.3)式对 $v\geqslant 1$ 成立. 当 $0<v<1$ 时,对于充分大

的 C，(1.3) 式的右边大于 1，故(1.3) 式自然成立. 证毕.

注 这一类型的不等式在讨论 Wiener 过程增量的性质中十分有用. 本节及下节的主要定理的证明都依赖于这一不等式. 近年来，若干作者关于 Wiener 过程增量的进一步的讨论也依赖于这一类不等式的推广.

定理 1.1 (Lévy **连续模定理**) 我们有

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sup\limits_{0\le s\le 1-h}\sup\limits_{0\le t\le h}|W(s+t)-W(s)|}{\sqrt{2h\log(1/h)}}=1 \quad \text{a.s.}, \tag{1.5}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sup\limits_{0\le s\le 1-h}|W(s+h)-W(s)|}{\sqrt{2h\log(1/h)}}=1 \quad \text{a.s.} \tag{1.6}$$

证 记

$$A_h=\sup_{0\le s\le 1-h}\sup_{0\le t\le h}|W(s+t)-W(s)|. \tag{1.7}$$

首先，我们来证

$$\limsup_{h\to 0} A_h/\sqrt{2h\log(1/h)}\le 1 \quad \text{a.s.} \tag{1.8}$$

对 $v=(1+\varepsilon)\sqrt{2h\log h^{-1}}$ $(\varepsilon>0)$，应用引理 1.2，得到

$$P\left\{\frac{A_h}{\sqrt{2h\log h^{-1}}}\ge 1+\varepsilon\right\}\le\frac{C}{h}\exp\left\{-\frac{2(1+\varepsilon)^2\log h^{-1}}{2+\varepsilon}\right\}<Ch^{\varepsilon}.$$

取 $T>\varepsilon^{-1}$，$h=h_n=n^{-T}$. 那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{\frac{A_{h_n}}{\sqrt{2h_n\log h_n^{-1}}}\ge 1+\varepsilon\right\}\le\sum_{n=1}^{\infty}Cn^{-T\varepsilon}<\infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理就得

$$\limsup_{n\to\infty}A_{h_n}\Big/\sqrt{2h_n\log h_n^{-1}}\le 1+\varepsilon \quad \text{a.s.}$$

对于 $h_{n+1}<h<h_n$，由于 A_h 单调不减，那么对每一 $\omega\in\Omega$，有

$$\begin{aligned}\limsup_{h\to 0}\frac{A_h}{\sqrt{2h\log h^{-1}}}&\le\limsup_{n\to\infty}\frac{A_{h_n}}{\sqrt{2h_{n+1}\log h_{n+1}^{-1}}}\\&=\limsup_{n\to\infty}\frac{A_{h_n}}{\sqrt{2h_n\log h_n^{-1}}}\sqrt{\frac{h_n\log h_n^{-1}}{h_{n+1}\log h_{n+1}^{-1}}}\\&\le 1+\varepsilon \quad \text{a.s.}\end{aligned}$$

让 $\varepsilon\to 0$，即得证(1.8) 成立.

其次来证

$$\liminf_{h\to 0}\sup_{0\le s\le 1-h}\frac{|W(s+h)-W(s)|}{\sqrt{2h\log h^{-1}}}\ge 1 \quad \text{a.s.} \tag{1.9}$$

由正态分布尾概率估计，我们有

$$
\begin{aligned}
&P\left\{\left|W\left(\frac{k+1}{n}\right)-W\left(\frac{k}{n}\right)\right|<(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{2\log n}{n}}\right\}\\
&=P\{|W(1)|<(1-\varepsilon)\sqrt{2\log n}\}\\
&\leqslant 1-\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\cdot\frac{1}{\sqrt{8\pi\log n}}.
\end{aligned}
$$

利用增量独立性即得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}\left|W\left(\frac{k+1}{n}\right)-W\left(\frac{k}{n}\right)\right|<(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{2\log n}{n}}\right\}\\
&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\frac{1}{\sqrt{8\pi\log n}}\right)^{n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^{\varepsilon}}{\sqrt{8\pi\log n}}\right)<\infty. \quad (1.10)
\end{aligned}
$$

所以由 Borel-Cantelli 引理可得

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant s\leqslant 1-\frac{1}{n}}\frac{|W(s+1/n)-W(s)|}{\sqrt{2n^{-1}\log n}}\\
&\geqslant\liminf_{n\to\infty}\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}\frac{\left|W\left(\frac{k+1}{n}\right)-W\left(\frac{k}{n}\right)\right|}{\sqrt{2n^{-1}\log n}}\geqslant 1\quad\text{a.s.}\qquad (1.11)
\end{aligned}
$$

令 $h_n=\frac{1}{n}$，注意到当 $h_{n+1}<h<h_n$ 时，有

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{h\to 0}\sup_{0\leqslant s\leqslant 1-h}\frac{|W(s+h)-W(s)|}{\sqrt{2h\log h^{-1}}}\\
&\geqslant\liminf_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant s\leqslant 1-\frac{1}{n+1}}\frac{\left|W\left(s+\frac{1}{n+1}\right)-W(s)\right|}{\sqrt{2(n+1)^{-1}\log(n+1)}}\cdot\sqrt{\frac{(n+1)^{-1}\log(n+1)}{n^{-1}\log n}}\\
&\quad-\limsup_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant s\leqslant 1-\frac{1}{n+1}}\sup_{0\leqslant t\leqslant\frac{1}{n(n+1)}}\frac{|W(s+t)-W(s)|}{\sqrt{2n^{-1}\log n}}.\qquad (1.12)
\end{aligned}
$$

由已证的(1.8)式得上式右边第二项不超过

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\frac{A_{n(n+1)}}{\sqrt{2(n(n+1))^{-1}\log(n(n+1))}}\\
&\qquad\cdot\sqrt{\frac{(n(n+1))^{-1}\log(n(n+1))}{n^{-1}\log n}}=o(1).
\end{aligned}
$$

由(1.11)知(1.12)式右边第一项 $\geqslant 1$ (a.s.)，得证(1.9)式成立.

由(1.8)和(1.9)式得证定理成立.

这样，从连续模定理可知，由(1.2)式定义的过程 $\{W(t);t\geqslant 0\}$ 的样本函数概率为 1 地是连续的. 至此我们完成了概率空间 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 上 Wiener 过程

存在性的全部证明.

§2 Wiener 过程的增量有多大

定理 1.1 给出了 Wiener 过程的连续模，也就是在单位区间$[0,1]$中，长为 h 的子区间上 Wiener 过程的增量，当 $h\to 0$ 时它有多大?但是对区间$[0,T]$，在长为 a_T 的子区间上，当 $T\to\infty$ 时，Wiener 过程的增量有多大呢?它的首要结果是由匈牙利学派的 M. Csörgö 和 P. Révész 于 1979 年获得的. 由它可推出关于 Wiener 过程的强大数律与重对数律，给出 Strassen 关于 Wiener 过程重对数律简洁的新证明. 由此并结合强逼近即可写出许多弱收敛的重要结果. 因此自该文发表至今引起了一系列的研究.

定理 2.1 设 $a_T(T>0)$ 是连续函数，$0<a_T\leqslant T$. 我们有

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T-a_T}\beta_T|W(t+a_T)-W(t)|=1\quad \text{a.s.}\tag{2.1}$$

$$\limsup_{T\to\infty}\beta_T|W(T+a_T)-W(T)|=1\quad \text{a.s.}\tag{2.2}$$

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\leqslant s\leqslant a_T}\beta_T|W(T+s)-W(T)|=1\quad \text{a.s.}\tag{2.3}$$

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T-a_T}\sup_{0\leqslant s\leqslant a_T}\beta_T|W(t+s)-W(t)|=1\quad \text{a.s.}\tag{2.4}$$

其中 $\beta_T=(2a_T(\log(T/a_T)+\log\log T))^{-1/2}$.

若 a_T 还满足条件

(i) $\lim\limits_{T\to\infty}(\log(T/a_T))/\log\log T=\infty$,

那么有

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T-a_T}\sup_{0\leqslant s\leqslant a_T}\beta_T|W(t+s)-W(t)|=1\quad \text{a.s.}\tag{2.5}$$

如果进一步还满足条件

(ii) $\lim\limits_{j\to\infty}\sup\limits_{j\leqslant t\leqslant j+1}|a_t/a_j-1|=0$,

则有

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T-a_T}\beta_T|W(t+a_T)-W(t)|=1\quad \text{a.s.}\tag{2.6}$$

这一定理与定理 1.1 是彼此紧密相关的，定理的证明也将运用引理 1.2 得到. 现在先把该引理推广到正半直线上.

引理 2.1 对任给 $\varepsilon>0$，存在常数 $C=C(\varepsilon)>0$，使得对每一正数 v,T 和 $0<h<T$ 成立着不等式

$$P\Big\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T-h}\sup_{0\leqslant s\leqslant h}|W(t+s)-W(t)|\geqslant v\sqrt{h}\Big\}\leqslant\frac{CT}{h}e^{-\frac{v^2}{2+\varepsilon}}.\tag{2.7}$$

证　因为对任给 $T>0$，成立着

$$\{W(t);\ 0\leqslant t\leqslant T\}\overset{\text{def}}{=}\{\sqrt{T}W(t/T);\ 0\leqslant t\leqslant T\},$$

所以由引理 1.2 即得(2.7)式的

$$\text{左边}\quad P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T-h}\ \sup_{0\leqslant s\leqslant h}\sqrt{T}\left|W\left(\frac{t+s}{T}\right)-W\left(\frac{t}{T}\right)\right|\geqslant v\sqrt{h}\right\}$$

$$=P\left\{\sup_{0\leqslant t'\leqslant 1-h'}\ \sup_{0\leqslant s'\leqslant h'}|W(t'+s')-W(t')|\geqslant v\sqrt{h'}\right\}$$

$$\leqslant\frac{C}{h'}e^{-\frac{v^2}{2+\varepsilon}}=\frac{CT}{h}e^{-\frac{v^2}{2+\varepsilon}},$$

其中 $t'=t/T$，$s'=s/T$，$h'=h/T$.

定理 2.1 的证明　为证(2.1)—(2.4)诸式成立，我们只需证明(2.4)式左边的上极限 $\leqslant 1$ a.s.，(2.2)式左边的上极限 $\geqslant 1$ a.s. 现在分述如下.

1°　记 $A(T)=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T-a_T}\ \sup\limits_{0\leqslant s\leqslant a_T}\beta_T|W(t+s)-W(t)|$. 证明

$$\limsup_{T\to\infty}A(T)\leqslant 1\quad \text{a.s.}\tag{2.8}$$

对任意 $\varepsilon>0$，令 $1<\theta<1+\varepsilon$. 定义 $A_k=\{T:\ \theta^k\leqslant T/a_T<\theta^{k+1}\}$，$A_{kj}=\{T:\ \theta^j\leqslant a_T<\theta^{j+1},T\in A_k\}$. 我们有

$$\limsup_{T\to\infty}A(T)\leqslant\limsup_{k+j\to\infty}\ \sup_{T\in A_{kj}}A(T)$$

$$\leqslant\limsup_{k+j\to\infty}\ \sup_{0\leqslant t\leqslant\theta^{k+j+2}}\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\theta^{j+1}}\frac{\theta^2|W(t+s)-W(t)|}{\{2\theta^{k+j+2}\log(\theta^{k+1}\log\theta^{k+j+2})\}^{1/2}}.\tag{2.9}$$

利用引理 2.1，

$$P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant\theta^{k+j+2}}\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\theta^{j+1}}\frac{|W(t+s)-W(t)|}{\{2\theta^{k+j+2}\log(\theta^{k+1}\log\theta^{k+j+2})\}^{1/2}}\geqslant 1+\varepsilon\right\}$$

$$\leqslant c\theta^{k+1}\exp\{-(1+\varepsilon)\log(\theta^{k+1}\log\theta^{k+j+2})\}$$

$$\leqslant c\theta^{-k\varepsilon}j^{-(1+\varepsilon)}(\log\theta)^{-(1+\varepsilon)}.$$

注意到

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\theta^{-k\varepsilon}j^{-(1+\varepsilon)}<\infty$$

和 ε 的任意性，由 Borel-Cantelli 引理和(2.9)得证(2.8)式.

2°　记 $B(T)=\beta_T|W(T)-W(T-a_T)|$. 证明

$$\limsup_{T\to\infty}B(T)\geqslant 1\quad \text{a.s.}\tag{2.10}$$

由正态分布的尾概率估计(附录二，二，2)，对任一 $\varepsilon>0$，当 T 充分大时有

$$P\{B(T)\geqslant 1-\varepsilon\}=P\left\{\frac{1}{\sqrt{a_T}}|W(T)-W(T-a_T)|\right.$$

$$\geqslant (1-\varepsilon)\sqrt{2(\log(T/a_T)+\log\log T)}\Big\}$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{(1-\varepsilon)\left(2\log\frac{T\log T}{a_T}\right)^{1/2}}-\frac{1}{(1-\varepsilon)^3\left(2\log\frac{T\log T}{a_T}\right)^{3/2}}\right\}$$

$$\cdot\exp\left\{-(1-\varepsilon)^2\log\frac{T\log T}{a_T}\right\}$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(2\log\frac{T\log T}{a_T}\right)^{-1/2}\exp\left\{-(1-\varepsilon)^2\log\frac{T\log T}{a_T}\right\}$$

$$\geqslant \left(\frac{a_T}{T\log T}\right)^{1-\varepsilon}. \tag{2.11}$$

令 $T_1=1$，定义 $T_{k+1}=T_k+a_{T_k}$. 我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}P\{B(T_k)\geqslant 1-\varepsilon\}\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{T_k}}{T_k\log T_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{T_{k+1}-T_k}{T_k\log T_k}$$

$$\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_{T_k}^{T_{k+1}}\frac{1}{x\log x}\mathrm{d}x=\infty. \tag{2.12}$$

注意到事件的独立性，由 Borel-Cantelli 引理即得

$$\limsup_{T\to\infty}B(T)\geqslant\limsup_{k\to\infty}B(T_k)\geqslant 1 \quad \text{a.s.}$$

即(2.10)成立. 结合(2.8)和(2.10)即得证(2.1)-(2.4)式成立.

3° 为证在条件(i)下(2.5)成立，只需证明

$$\liminf_{T\to\infty}A(T)\geqslant 1 \quad \text{a.s.} \tag{2.13}$$

就够了. 而由条件(i)，上式又等价于

$$\liminf_{T\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T-a_T}\sup_{0\leqslant s\leqslant a_T}\frac{|W(t+s)-W(t)|}{\{2a_T[\log(T/a_T)+\log\log T]\}^{1/2}}\geqslant 1 \quad \text{a.s.} \tag{2.14}$$

对上面定义过的集合 A_{kj}，上式左边不小于

$$\liminf_{k+j\to\infty}\inf_{T\in A_{kj}}\sup_{0\leqslant t\leqslant T-a_T}\sup_{0\leqslant s\leqslant a_T}\frac{|W(t+s)-W(t)|}{\{2a_T[\log(T/a_T)+\log\log T]\}^{1/2}}$$

$$\geqslant\liminf_{k+j\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant\theta^k}\sup_{0\leqslant s\leqslant\theta^j}\frac{|W(t+s)-W(t)|}{\theta^2\{2\theta^j\log(\theta^k/\log\theta^{k+j})\}^{1/2}}$$

$$\geqslant\liminf_{k+j\to\infty}\max_{1\leqslant l\leqslant\theta^{k-j}}\frac{|W((l+1)\theta^j)-W(l\theta^j)|}{\theta^2\{2\theta^j\log(\theta^k/j)\}^{1/2}}. \tag{2.15}$$

因为 $W((l+1)\theta^j)-W(l\theta^j)$，$l=0,1,\cdots,[\theta^{k-j}]$，是相互独立的，由(2.11)式有

$$P\left\{\max_{1\leqslant l\leqslant\theta^{k-j}}\frac{|W((l+1)\theta^j)-W(l\theta^j)|}{\{2\theta^j\log(\theta^k/j)\}^{1/2}}\leqslant 1-\varepsilon\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \{1-(\theta^k/j)^{-(1-\varepsilon)}\}^{[\theta^{k(1-\varepsilon/2)}]}\\
&< \exp\{-\theta^{k(1-\varepsilon/2)}(\theta^k/j)^{-(1-\varepsilon)}\}\\
&= \exp\{-\theta^{k\varepsilon/2}j^{1-\varepsilon}\},
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

其中第二个不等号利用了条件(i).注意到

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\exp\{-\theta^{k\varepsilon/2}j^{1-\varepsilon}\}<\infty$$

和 ε 的任意性,由 Borel Cantelli 引理和(2.15)得证(2.14).

4° 记 $C(T)=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T-a_T}|W(t+a_T)-W(t)|/\beta_T$.为证在条件(i)和(ii)下(2.6)成立,只需证明

$$\liminf_{T\to\infty} C(T)\geqslant 1\quad \text{a.s.} \tag{2.17}$$

就够了.类似于(2.16)我们有

$$
\begin{aligned}
&P\{C(j)\leqslant 1-\varepsilon\}\\
&\leqslant P\left\{\max_{1\leqslant l\leqslant j/a_j}\frac{|W((l+1)a_j)-W(la_j)|}{\{2a_j[\log(j/a_j)+\log\log j]\}^{1/2}}<1-\varepsilon\right\}\\
&\leqslant \exp\left\{-\left(\frac{j}{a_j}\right)^{\varepsilon}(\log j)^{-(1-\varepsilon)}\right\}\\
&\leqslant \exp\{-(\log j)^{2}\},
\end{aligned}
$$

其中最后一不等式是因为条件(i).因此由 Borel Cantelli 引理,就得到

$$\liminf_{j\to\infty} C(j)\geqslant 1\quad \text{a.s.} \tag{2.18}$$

由条件(ii),当 $j\to\infty$ 时,$\beta_{j+1}/\beta_j\to 1$,且对任意的 $0<\delta<1$,只要 j 充分大,对 $j\leqslant T\leqslant j+1$,成立 $|a_j-a_T|\leqslant\delta a_T$.因此有

$$C(T)\geqslant(\beta_{j+1}/\beta_T)C(j)-\sup_{0\leqslant t\leqslant T-\delta a_T}\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\delta a_T}\beta_T^{-1}|W(t+s)-W(t)|. \tag{2.19}$$

而由第一步有

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{T\to\infty}\ \sup_{0\leqslant t\leqslant T-\delta a_T}\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\delta a_T}\beta_T^{-1}|W(t+s)-W(t)|\\
&\leqslant \limsup_{T\to\infty}\left(\frac{\delta a_T(\log(T/\delta a_T)+\log\log T)}{a_T(\log(T/a_T)+\log\log T)}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=\delta^{\frac{1}{2}}\quad \text{a.s.}
\end{aligned}
$$

这就证明了(2.17).定理证毕.

注 2.1　在(2.1)-(2.6)式中,当 T,t,s 取整数值时仍成立,去掉绝对值后也对.又由 Wiener 过程的对称性,所以在去掉绝对值,并以 liminf 代替 limsup,inf 代替 sup,-1 代替 1 时它们也成立.例如

$$\liminf_{T\to\infty}\inf_{0\le t\le T-a_T}\beta_T(W(t+a_T)-W(t)) = -1 \quad \text{a.s.} \qquad (2.2')$$

由定理 2.1,当取 a_T 为特殊的形式,如 $C\log T$, CT, 1 时,就可写出下述推论.

推论 2.1 对任给的 $C>0$,有

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-C\log T}\frac{1}{C\log T}(W(t+C\log T)-W(t)) = \sqrt{\frac{2}{C}} \quad \text{a.s.}$$

这就是 Erdös Rényi(1970) 关于 Wiener 过程的大数定律.

推论 2.2 对于 $0<C\le 1$ 有

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-CT}\frac{|W(t+CT)-W(t)|}{\sqrt{2CT\log\log T}} = 1 \quad \text{a.s.} \qquad (2.20)$$

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-CT}\sup_{0\le s\le CT}\frac{|W(t+s)-W(t)|}{\sqrt{2CT\log\log T}} = 1 \quad \text{a.s.} \qquad (2.21)$$

特别,当 $C=1$ 时,就是 Lévy 关于 Wiener 过程的(古典)重对数律.

推论 2.3 我们有

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T-1}\frac{|W(t+1)-W(t)|}{\sqrt{2\log T}} = 1 \quad \text{a.s.} \qquad (2.22)$$

§3 Wiener 过程的重对数律

从推论 2.2 或直接从定理 2.1 可给出 Levy 关于 Wiener 过程的重对数律,这就是

定理 3.1

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{|W(T)|}{\sqrt{2T\log\log T}} = 1 \quad \text{a.s.} \qquad (3.1)$$

这只需在(2.1)中让 $a_T = T$ 或在(2.20)中让 $C=1$ 即得. 又从(2.4)还可写出

定理 3.2

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le t\le T}\frac{|W(t)|}{\sqrt{2T\log\log T}} = \limsup_{T\to\infty}\sup_{0\le x\le 1}\frac{|W(xT)|}{\sqrt{2T\log\log T}} = 1 \quad \text{a.s.} \qquad (3.2)$$

关于 $\{W(xT);\ 0\le x\le 1\}$ 在 $T\to\infty$ 时的性质,首先由 Strassen 在 1964 年给出较完善的描述,这就是本节中将要讨论的关于 Wiener 过程的 Strassen 重对数律. 为叙述这一基本定理,先引入下述记号.

记 $C[0,1]$ 中一切绝对连续，且满足 $f(0)=0$，$\int_0^1 (f'(x))^2 \mathrm{d}x \leqslant 1$ 的函数 f 的全体为 K，

$$\eta_n(x)=\frac{W(nx)}{\sqrt{2n\log\log n}},\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

易见 $\{\eta_n(x)\}$ 是样本函数属于 $C[0,1]$ 的随机过程列.

定理 3.3(Strassen)　随机过程列 $\{\eta_n(x);\ 0\leqslant x\leqslant 1\}$ 在 $C[0,1]$ 中概率为 1 地相对紧且极限点集为 K.

注 3.1　定理的结论是指存在 $\Omega_0\subset\Omega$，$P(\Omega_0)=1$，使得：(i) 对每一 $\omega\in\Omega_0$ 及自然数列 $\{n_k\}$，有子列 $n_{k_j}=n_{k_j}(\omega)$ 和 $f\in K$，使在 $[0,1]$ 上一致地有 $\eta_{k_j}(x,\omega)\to f(x)$；(ii) 对任一 $f\in K$，$\omega\in\Omega_0$，存在 $m_k=m_k(\omega,f)$，使在 $[0,1]$ 上一致地有 $\eta_{m_k}(x,\omega)\to f(x)$.

定理的证明需要下述引理.

引理 3.1　设 f 是 $[0,1]$ 上实值函数，则下面两命题等价：

(i) f 绝对连续且 $\int_0^1 (f'(x))^2 \mathrm{d}x\leqslant 1$；

(ii) f 连续，对任一正整数 r，$\sum_{i=1}^r r\left(f\left(\frac{i}{r}\right)-f\left(\frac{i-1}{r}\right)\right)^2\leqslant 1$.

证　由 Schwarz 不等式，我们有

$$\sum_{i=1}^r r\left(f\left(\frac{i}{r}\right)-f\left(\frac{i-1}{r}\right)\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^r\int_{\frac{i-1}{r}}^{\frac{i}{r}}(f'(x))^2\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x\leqslant 1.$$

所以由(i)可推得(ii). 现在来证由(ii)也可推得(i).

因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 中有界且一致连续，所以对任给的 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$，使当 $|x-y|<\delta$ 时 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 不妨设当 $\varepsilon\to 0$ 时 $\delta=\delta(\varepsilon)\to 0$. 对 $[0,1]$ 中任意 m 个互不相交的区间 $(\alpha_k,\beta_k)(k=1,2,\cdots,m)$，对充分大的 r，存在整数 $0\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_{2m}\leqslant r$，使

$$|\alpha_j-i_{2j-1}/r|<\delta,\quad |\beta_j-i_{2j}/r|<\delta.$$

应用 Schwarz 不等式有

$$\sum_{k=1}^m |f(\beta_k)-f(\alpha_k)|\leqslant\sum_{k=1}^m\left|f\left(\frac{i_{2k}}{r}\right)-f\left(\frac{i_{2k-1}}{r}\right)\right|+2m\varepsilon$$

$$\leqslant\left\{\sum_{k=1}^r r\left(f\left(\frac{k}{r}\right)-f\left(\frac{k-1}{r}\right)\right)^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k=1}^m\frac{i_{2k}-i_{2k-1}}{r}\right\}^{1/2}+2m\varepsilon$$

$$\leqslant 1\cdot\left\{\sum_{k=1}^m(\beta_k-\alpha_k)+2m\delta\right\}^{1/2}+2m\varepsilon.$$

由 ε 任意性及 $\delta = \delta(\varepsilon) \to 0(\varepsilon \to 0)$，由上式即可推出

$$\sum_{k=1}^{n} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| \leqslant \{\sum_{k=1}^{m}(\beta_k - \alpha_k)\}^{1/2}.$$

这就得证 $f(x)$ 是绝对连续的，因此 $f'(x)$ 在[0,1]中几乎处处存在. 由(11)按 Fatou 引理知 $(f'(x))^2$ 是 L 可积的且 $\int_0^1 (f'(x))^2 \mathrm{d}x \leqslant 1$. 证毕.

引理 3.2 设 d 是正整数，$\alpha_1,\cdots,\alpha_d$ 是实数，满足 $\sum_{i=1}^{d}\alpha_i^2 = 1$，记

$$S_n = \alpha_1 W(n) + \alpha_2(W(2n) - W(n)) + \cdots + \alpha_d(W(dn) - W((d-1)n)).$$

那么有

$$\limsup_{n\to\infty} S_n / \sqrt{2n\log\log n} = 1 \quad \text{a.s.} \tag{3.3}$$

$$\liminf_{n\to\infty} S_n / \sqrt{2n\log\log n} = -1 \quad \text{a.s.} \tag{3.3'}$$

证 首先来证

$$\limsup_{n\to\infty} |S_n| / \sqrt{2n\log\log n} \leqslant 1 \quad \text{a.s.} \tag{3.4}$$

因为 S_n 服从正态分布 $N(0,n)$，由正态分布尾概率估计，对任给 $\varepsilon > 0$ 及适当大的 n 有

$$P\{|S_n| \geqslant (1+\varepsilon)\sqrt{2n\log\log n}\} < (\log n)^{-(1+\varepsilon)^2}. \tag{3.5}$$

令 $N_k = [\theta^k]\ (\theta > 1)$. 那么从(3.5)式得

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{|S_{N_k}| \geqslant (1+\varepsilon)\sqrt{2N_k\log\log N_k}\} < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理得

$$\limsup_{k\to\infty} |S_{N_k}| / \sqrt{2N_k\log\log N_k} \leqslant 1 + \varepsilon \quad \text{a.s.} \tag{3.6}$$

另一方面，应用定理 2.1 我们有

$$\limsup_{k\to\infty} \max_{1\leqslant j\leqslant d} \max_{N_k\leqslant n < N_{k+1}} \frac{|W(jn) - W(jN_k)|}{\sqrt{2N_k\log\log N_k}}$$

$$\leqslant \limsup_{k\to\infty} \sup_{0\leqslant t\leqslant dN_k} \sup_{0\leqslant s\leqslant dN_k(\theta-1)} \frac{|W(t+s) - W(t)|}{\sqrt{2N_k\log\log N_k}} \leqslant \sqrt{d(\theta-1)},$$

所以由 $|S_n - S_{N_k}| \leqslant 2\sum_{j=1}^{d}|W(jn) - W(jN_k)|$ 即得

$$\limsup_{k\to\infty} \sup_{N_k\leqslant n < N_{k+1}} \frac{|S_n - S_{N_k}|}{\sqrt{2N_k\log\log N_k}} \leqslant 2d^{3/2}\sqrt{\theta - 1}. \tag{3.7}$$

由(3.6)和(3.7)式，并选 θ 充分地接近于 1 就可推得(3.4)式成立.

其次，我们来证

$$\limsup_{n\to\infty} S_n/\sqrt{2n\log\log n} \geqslant 1 \quad \text{a.s.} \tag{3.8}$$

给定 $0<\varepsilon<1$，设 θ 为一整数，满足 $\theta > d/\varepsilon$. 记 $N_k = \theta^k$，

$$S_k^* = \alpha_1(W(N_k) - W(dN_{k-1})) + \alpha_2(W(2N_k) - W(N_k)) + \cdots$$
$$+ \alpha_d(W(dN_k) - W((d-1)N_k)).$$

那么

$$E(S_k^*)^2 = (\alpha_2^2 + \cdots + \alpha_d^2)N_k + \alpha_1^2(N_k - dN_{k-1})$$
$$= N_k - \alpha_1^2 dN_{k-1} \geqslant N_k(1 - d/\theta) \geqslant N_k(1-\varepsilon).$$

由此及正态分布的尾概率估计得

$$P\left\{\frac{S_k^*}{\sqrt{2N_k(1-\varepsilon)\log\log N_k}} \geqslant 1-\varepsilon\right\} \geqslant \frac{e^{-(1-\varepsilon)^2\log\log N_k}}{2\sqrt{2\pi\log\log N_k}}.$$

因为 $\{S_k^*;\ k=1,2,\cdots\}$ 是独立 r.v. 列，所以由 Borel-Cantelli 引理就有

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{S_k^*}{\sqrt{2N_k\log\log N_k}} \geqslant (1-\varepsilon)^{3/2}. \tag{3.9}$$

对 $N_k \leqslant n < N_{k+1}$，

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} \geqslant \limsup_{k\to\infty} \frac{S_k^*}{\sqrt{2N_k\log\log N_k}} - \limsup_{k\to\infty} \frac{W(dN_{k-1})}{\sqrt{2N_k\log\log N_k}}.$$

运用定理 3.1 可得上式右边第二项不超过 $\sqrt{\varepsilon}$，这样由(3.9)和 ε 的任意性，从上式即可推出(3.8). 从(3.4)和(3.8)式得证(3.3)式成立. 由 W 的对称性得(3.3′)也成立. 证毕.

对任一 $f \in C[0,1]$ 和正整数 d，记

$$f^{(d)}(x) = f\left(\frac{i}{d}\right) + d\left(f\left(\frac{i+1}{d}\right) - f\left(\frac{i}{d}\right)\right)\left(x - \frac{i}{d}\right),$$

其中 $i/d \leqslant x \leqslant (i+1)/d$，$i=0,1,\cdots,d-1$. $f^{(d)}(x)$ 是函数 $f(x)$ 在点 i/d 上的线性内插. 令

$$C_d = \{f^{(d)}: f \in C[0,1]\} \subset C[0,1], \quad K_d = \{f^{(d)}: f \in K\}.$$

由引理 3.1 可知 $K_d \subset K$.

引理 3.3　序列 $\{\eta_n^d(x)\}$ 在 C_d 中概率为 1 地相对紧且极限点集为 K_d.

证　由定理 3.1 和 Wiener 过程的连续性，命题在 $d=1$ 时成立. 我们来证 $d=2$ 时也成立. 对于较大的 d，可类似地证明. 记 $Z_n = (W(n), W(2n) - W(n))$ $(n=1,2,\cdots)$，α、β 是实数，满足 $\alpha^2+\beta^2=1$. 那么由引理 3.2 和 W 的连续性，序列

$$\frac{\binom{\alpha}{\beta} Z_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = \frac{\alpha W(n) + \beta(W(2n) - W(n))}{\sqrt{2n\log\log n}}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

的极限点集是区间$[-1,1]$. 这就推得$\{Z_n/\sqrt{2n\log\log n};\ n=1,2,\cdots\}$的极限点集是单位圆的子集,且单位圆的圆周属于这一极限点集.

现在记$Z_n^* = (W(n), W(2n)-W(n), W(3n)-W(2n))$. 如上同样可证$\{Z_n^*/\sqrt{2n\log\log n};\ n=1,2,\cdots\}$的极限点集是$\mathbf{R}^3$的单位球的子集,它包含此球的边界. 从这一事实通过投影就可推得$\{Z_n/\sqrt{2n\log\log n};\ n=1,2,\cdots\}$的极限点集是$\mathbf{R}^2$的单位圆,这与我们的结论等价.

定理 3.3 的证明 对每一$\omega\in\Omega$,我们有

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|\eta_n(x) - \eta_n^{(d)}(x)| \leqslant \sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\sup_{0\leqslant s\leqslant 1/d}|\eta_n(x+s) - \eta_n(x)|$$

$$= \sup_{0\leqslant t\leqslant n}\sup_{0\leqslant s\leqslant n/d}\frac{|W(t+s) - W(t)|}{\sqrt{2d^{-1}n\log\log n}}\sqrt{\frac{1}{d}}.$$

由推论 2.2 可得

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|\eta_n(x) - \eta_n^{(d)}(x)| \leqslant d^{-1/2} \quad \text{a.s.}$$

这样由引理 3.1 和 3.3,并注意到引理 3.1 保证了K是闭的,就证明了定理 3.2 成立.

注 3.2 Strassen 原来的证明是比较复杂的,这里运用 Wiener 过程增量的有关结果,证明就简洁得多了. 又定理 3.2 中n的离散性不是本质的. 如记

$$\eta_t(x) = W(tx)/\sqrt{2t\log\log t}, \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{3.10}$$

那么可写出

定理 3.4(Strassen) $\{\eta_t(x);\ 0\leqslant t<\infty\}$在$C[0,1]$中概率为 1 地相对紧且极限点集是$K$.

最后,我们来给出当$t\to 0$时的如下形式的重对数律.

定理 3.5 (Lévy)

$$\limsup_{t\to 0}\frac{|W(t)|}{\sqrt{2t\log\log t^{-1}}} = \limsup_{t\to 0}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\frac{|W(s)|}{\sqrt{2t\log\log t^{-1}}} = 1 \quad \text{a.s.}$$

证 由定理 3.1,对(1.1)中定义的 Wiener 过程$\{\tilde{W}(t)\}$,有

$$1 = \limsup_{T\to\infty}\frac{|\tilde{W}(T)|}{\sqrt{2T\log\log T}} = \limsup_{T\to\infty}\frac{|W(T^{-1})|}{\sqrt{2T^{-1}\log\log T}}$$

$$= \limsup_{t\to 0}\frac{|W(t)|}{\sqrt{2t\log\log t^{-1}}} \quad \text{a.s.} \tag{3.11}$$

另一式由定理 3.2 可得.

注 3.3 显然定理 3.5 也可改写为：对任给的 $t_0>0$，我们有

$$\limsup_{h\to 0}\frac{W(t_0+h)-W(t_0)}{\sqrt{2h\log\log h^{-1}}}=1 \quad \text{a.s.} \tag{3.12}$$

比较定理 1.1 与(3.12)可见，后者是说 $W(t)$ 对任一固定的 t_0，连续模不大于 $(2h\log\log h^{-1})^{1/2}$——这是局部连续模. 另一方面，定理 1.1 告诉我们，在某些随机点连续模可以大得多，达到 $(2h\log h^{-1})^{1/2}$——这是整体连续模. 这意味着 Wiener 过程的样本轨道在某些随机点上重对数律被违反了.

§4 Skorohod 嵌入定理

Skorohod 嵌入定理是 60 年代初概率论的一个杰出成果，它把 i.i.d.r.v. 的和 S_n 通过停时与 Wiener 过程联系了起来. Wiener 过程具有许多良好性质，这样一来，通过嵌入定理就有可能导出 S_n 的某些极限性质. 下一节的 Strassen 强不变原理就是一个有力的例子.

4.1 Wiener 过程的鞅性质

在本节中，总记 $W=\{W(t);\ t\geqslant 0\}$ 是 Wiener 过程，$\mathscr{F}_t=\sigma(W(s);\ 0\leqslant s\leqslant t)$. 首先，易见 Wiener 过程具有很好的鞅性质.

引理 4.1(i) $\{W(t),\ \mathscr{F}_t;\ t\geqslant 0\}$ 是鞅；

(ii) $E[(W(t)-W(s))^2|\mathscr{F}_s]=t-s$ a.s. $(0\leqslant s<t)$； (4.1)

(iii) $\{W^2(t)-t,\ \mathscr{F}_t;\ t\geqslant 0\}$ 也是鞅.

证 (i) 简记 $W_t=W(t)$. 当 $s<t$ 时，由 Wiener 过程的增量独立性有

$$E(W_t|\mathscr{F}_s)=E(W_t-W_s|\mathscr{F}_s)+W_s=E(W_t-W_s)+W_s=W_s \quad \text{a.s.}$$

(ii) 当 $0\leqslant s<t$ 时，有

$$E((W_t-W_s)^2|\mathscr{F}_s)=E(W_t-W_s)^2=t-s \quad \text{a.s.}$$

(iii) 由(i)有

$$E(W_tW_s|\mathscr{F}_s)=W_sE(W_t|\mathscr{F}_s)=W_s^2 \quad \text{a.s.}$$

所以

$$E((W_t-W_s)^2-(t-s)|\mathscr{F}_s)=E(W_t^2-t|\mathscr{F}_s)-(W_s^2-s) \quad \text{a.s.}$$

引理 4.2 设 U 是实直线上的一个开集，则 Wiener 过程 W 首次离开 U 的时刻

$$\tau_U(\omega)=\inf\{t:\ W(t,\omega)\in U^c\} \tag{4.2}$$

是 Wiener 过程的一个停时，其中当 $\{\cdot\}$ 为空集时，定义 $\tau_U(\omega)=\infty$.

特别，当 $U=(a,b)$，$a<0<b$ 时，$\tau_{a,b}=\tau_U$ 是一个有限停时.

证 事实上，如记 $D_n=\{x: d(x,U^c)<1/n\}$，则对任一实数 $t(>0)$ 及一切有理数 $0<r<t$，有

$$\{\tau_U<t\}=(W(t)\in U^c)\cup\Big(\bigcap_n\bigcup_{r<t}(W(r)\in D_n)\Big)\in\mathscr{F}_t.$$

所以 τ_U 是一个停时.

特别，当 $U=(a,b)$，$a<0<b$ 时，因 $W(0)=0$，且 Wiener 过程的样本函数概率为 1 地连续且无界，所以 $\tau_{a,b}$ 是 a.s. 有限的. 证毕.

引理 4.3 设 $\{X_t,\mathscr{F}_t;\ t\geqslant 0\}$ 是样本函数右连续的鞅，τ 是它的一个有界停时，$\tau\leqslant t_0$，且 $Y_{t_0}=\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t_0}|X_s|$ 可积，则 $EX_\tau=EX_0$.

证 设 $h_n=1/2^n$，$k=1,2,\cdots,2^n$，令

$$B_{nk}=\{\omega: (k-1)h_nt_0<\tau(\omega)\leqslant kh_nt_0\}.$$

则

$$\tau_n=\sum_k kh_nt_0I_{B_{nk}}\downarrow\tau,$$

且

$$X_{\tau_n}=\sum_k X_{kh_nt_0}I_{B_{nk}}\to X_\tau.$$

由于 $\{X_t,\mathscr{F}_t\}$ 是鞅，$kh_nt_0\leqslant t_0$，由此即可推得

$$EX_{\tau_n}=\sum_k\int_{B_{nk}}X_{kh_nt_0}\mathrm{d}P=\sum_k\int_{B_{nk}}X_{t_0}\mathrm{d}P=EX_{t_0}=EX_0.$$

又因 $|X_{\tau_n}|\leqslant\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t_0}|X_s|=Y_{t_0}$，$Y_{t_0}$ 可积，因此由控制收敛定理即得

$$EX_0=EX_{\tau_n}\to EX_\tau,$$

得证引理 4.3 成立.

推论 4.1 设 τ 是 Wiener 过程的有界停时，则 $EW(\tau)=EW_0=0$，又对每一 $t\geqslant 0$ 及任一停时 τ 有

$$EW(\tau\wedge t)=0,\quad EW^2(\tau\wedge t)=E(\tau\wedge t),\tag{4.3}$$

其中 $\tau\wedge t=\min(\tau,t)$ 是 Wiener 过程的一个停时.

证 由于 Wiener 过程是鞅，且概率为 1 地具有连续的样本函数，又由引理 1.2 可知对任一 $t>0$，$\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}|W(s)|$ 可积，故由引理 4.3 即得 $EW(\tau)=EW(t)=EW(0)=0$. 特别，对任一停时 τ 及 $t\geqslant 0$，$\tau\wedge t$ 是一个有界停时，故 $EW(\tau\wedge t)=EW(0)=0$. 此外，由引理 4.1 知 $\{W^2(t)-t,\mathscr{F}_t;\ t\geqslant 0\}$ 是鞅，且满足引理 4.3 的全部条件，故对有界停时 $\tau\wedge t$ 有

$$E(W^2(\tau\wedge t)-\tau\wedge t)=E(W^2(0)-0)=0.$$

即得证 $EW^2(\tau\wedge t)=E(\tau\wedge t)$.

引理 4.4 对 Wiener 过程 W 的停时 $\tau = \tau_{a,b}, a < 0 < b$,

$$P\{W(\tau) = a\} = \frac{b}{|a| + b}, \quad P\{W(\tau) = b\} = \frac{|a|}{|a| + b}, \tag{4.4}$$

且 $E\tau = EW^2(\tau) = |a|b$.

证 因为 $W(0) = 0$,所以 Wiener 过程的样本函数都是从点 $0 (\in (a,b))$ 出发,且是双边无限的. 因此 $\tau = \tau_{a,b}$ 有限. 而 $W(\tau,\omega)$ 或在 a 或在 b 点离开开区间(a,b). 记

$$P\{W(\tau) = a\} = p, \quad P\{W(\tau) = b\} = 1 - p.$$

注意到在$(t < \tau)$ 上

$$|W(t)| \leqslant |a| + b \stackrel{\text{def}}{=} c,$$

所以当 $t \to \infty$ 时

$$\int_{\tau > t} |W(t)|\, dP \leqslant cP(\tau > t) \to 0.$$

从推论 4.1,由控制收敛定理,当 $t \to \infty$ 时有

$$0 = EW(\tau \wedge t) = EI_{(\tau \leqslant t)} W(\tau) + EI_{(\tau > t)} W(t) \to EW(\tau).$$

这样

$$0 = EW(\tau) = ap + b(1 - p), \quad p = b/(b + |a|),$$

得证(4.4) 式成立. 应用同样讨论于$\{W^2(t);\ t \geqslant 0\}$,从推论 4.1 可得

$$\begin{aligned} E\tau &= \lim_{t \to \infty} E(\tau \wedge t) = \lim_{t \to \infty} EW^2(\tau \wedge t) \\ &= \lim_{t \to \infty} \{EI_{(\tau \leqslant t)} W^2(\tau) + EI_{(\tau > t)} W^2(t)\} = EW^2(\tau). \end{aligned}$$

直接计算知 $EW^2(\tau) = |a|b$. 证毕.

4.2 Wiener 过程的强马氏性

引理 4.5(Wiener 过程的强马氏性) 设 τ 是 Wiener 过程 $W = \{W(t);\ t \geqslant 0\}$ 的停时,则

$$W^\tau = \{W(\tau + t) - W(\tau);\ t \geqslant 0\}$$

也是 Wiener 过程且它与 $W_{[0,\tau]} = \{W(t);\ 0 \leqslant t \leqslant \tau\}$ 独立.

证 显然过程 W^τ 的样本函数都是从 0 出发且概率为 1 地连续、双边无界的. 这样,我们只需证明 W^τ 的分布与 Wiener 过程同分布且与 $W_{[0,\tau]}$ 独立.

为此,设$(W_{t_1}, \cdots, W_{t_m})$ 和$(W_{t_1}^\tau, \cdots, W_{t_m}^\tau)$ 是 W 和 W^τ 的任给的对应的有限维随机向量,$g_1, \cdots, g_m$ 是 $\mathbf{R}$ 上任意的实值或复值有界连续函数,任一事件 $B \in \mathscr{F}_\tau = \sigma(W_t; 0 \leqslant t \leqslant \tau)$. 我们只需证明

$$E(I_B g_1(W_{t_1}^\tau) \cdots g_m(W_{t_m}^\tau)) = P(B) E(g_1(W_{t_1}) \cdots g_m(W_{t_m})). \tag{4.5}$$

例如 $g_j(a) = e^{iu_j a}$,则 $g_j(W_t) = e^{iu_j W_t}$, $g_j(W_t^\tau) = e^{iu_j (W_{\tau+t} - W_\tau)}$;又如 $g_j(a) =$

$I[0,a_j)$，则 $g_j(W_t)=I(0\leqslant W_t<a_j)$.

设 $h_n=1/2^n$，

$$\tau_n=\sum_{k=1}^{\infty}kh_nI((k-1)h_n\leqslant\tau<kh_n),$$

则

$$\tau_n\downarrow\tau,\quad W_{\tau_n+t}\to W_{\tau+t},\tag{4.6}$$

而且

$$B\cap(\tau_n=kh_n)\in\mathscr{F}_{kh_n}=\sigma(X_s;\ 0\leqslant s\leqslant kh_n).\tag{4.7}$$

为证(4.5)式成立，先来证明当 τ 换为 τ_n 时(4.5)式成立. 事实上，由(4.7)式及 Wiener 过程的增量独立性可得

$$\begin{aligned}E\{&I(B\cap(\tau_n=kh_n))g_1(W_{kh_n+t_1}-W_{kh_n})\cdots g_m(W_{kh_n+t_m}-W_{kh_n})\}\\&=P\{B\cap(\tau_n=kh_n)\}E\{g_1(W_{t_1})\cdots g_m(W_{t_m})\},\end{aligned}$$

对 k 从 $1,2,\cdots$ 求和，即得(4.5)式当 τ 换为 τ_n 时是成立的. 这样从(4.6)及控制收敛定理就可推得(4.5)式成立. 证毕.

4.3 Skorohod 嵌入定理

引理 4.6(嵌入引理) 设 r.v. X 具有 d.f. $F(x)$，且 $EX=0$，$0<\mathrm{Var}X=\sigma^2<\infty$，则存在 Wiener 过程 W 及它的一个停时 $\tau_{U,V}$，使得

$$P\{W(\tau_{U,V})<x\}=F(x),\quad E\tau_{U,V}=\sigma^2,$$

其中 U,V 是 r.v. 且 $U\leqslant 0<V$.

证 设 $W=\{W(t);t\geqslant 0\}$ 是概率空间 $(\Omega_0,\mathscr{A}_0,P_0)$ 上的 Wiener 过程，(U,V)，$U\leqslant 0\leqslant V$，是概率空间 $(\Omega_1,\mathscr{A}_1,P_1)$ 上的随机向量，它具有如下的二元联合分布：

$$dG(u,v)=\frac{1}{\alpha}(v-u)dF(u)dF(v),\quad 当\ u<0\leqslant v,$$

其中 $\alpha=EX^+=EX^-$. 因为 $EX=EX^+-EX^-=0$，且 X 是非退化的，故 $\alpha>0$. 这样在乘积概率空间 $(\Omega,\mathscr{A},P)=(\Omega_0\times\Omega_1,\mathscr{A}_0\times\mathscr{A}_1,P_0\times P_1)$ 上，W 和 (U,V) 是独立的，即 σ 域 $\sigma(W(t);t\geqslant 0)$ 和 $\sigma(U,V)$ 是独立的. 若记

$$\tau_{U,V}=\inf\{t;W(t)\in(U,V)\},$$

则

$$(\tau_{U,V}\leqslant t)=\{\min_{0\leqslant s\leqslant t}W(s)\leqslant U\}\cup\{\max_{0\leqslant s\leqslant t}W(s)\geqslant V\}\in\mathscr{F}_t,$$

所以 $\tau_{U,V}$ 是 Wiener 过程 W 的一个停时.

若 $a>0$，则由条件概率性质

$$P\{W(\tau_{U,V})>a\}=E\{P\{W(\tau_{U,V})>a|U,V\}\}.$$

由引理 4.4 得

$$P\{W(\tau_{U,V})>a\,|\,U=u,V=v\}=\begin{cases}0, & \text{当 } v<a,\\ u/(v-u), & \text{当 } v\geqslant a.\end{cases}$$

代入上式得

$$P\{W(\tau_{U,V})>a\}=\int_{-\infty}^{0}\int_{a}^{\infty}\frac{-u}{v-u}\mathrm{d}G(u,v)=P(X>a).$$

类似地,若 $a<0$,则有

$$P\{W(\tau_{U,V})<a\}=P(X<a),$$

得证 $W(\tau_{U,V})$ 的 d.f. 等于 X 的 d.f. $F(x)$.

又由引理 4.4 及已证的 $W(\tau_{U,V})$ 与 X 同分布可得

$$E\tau_{U,V}=E(E(\tau_{U,V}\,|\,U,V))=E|UV|=E(W(\tau_{U,V}))^2=EX^2.$$

证毕.

定理4.1(Skorohod 嵌入定理) 设给定 i.i.d. r.v. 列 $\{X_n;n\geqslant1\}$, $EX=0$, $\mathrm{Var}X=1$. 记 $S_0=0$, $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ $(n=1,2,\cdots)$. 则存在 Wiener 过程 $W=\{W(t);t\geqslant0\}$ 及与它独立的正 r.v. 序列 $\{\tau_n;n\geqslant1\}$ 使得

(i) $\{\tau_n;n\geqslant1\}$ 是 i.i.d. 的, $E\tau_1=\mathrm{Var}X_1=1$;

(ii) $\left\{W\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\tau_i\right)-W\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1}\tau_i\right);n\geqslant1\right\}$ 是 i.i.d. r.v. 列,具有与 X_1 相同的分布,或者等价地

(ii′) $\left\{W\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\tau_i\right);n\geqslant1\right\}$ 与 $\{S_n;n\geqslant1\}$ 同分布.

证 显然(ii)与(ii′)是等价的. 为证(i)和(ii),设 W 是概率空间 $(\Omega_0,\mathscr{A}_0,P_0)$ 上的 Wiener 过程,又设 (U_1,V_1), (U_2,V_2),… 分别是概率空间 $(\Omega_1,\mathscr{A}_1,P_1)$, $(\Omega_2,\mathscr{A}_2,P_2)$,… 上,具有共同的二元联合分布 $G(u,v)$ 的随机向量. 那么在乘积概率空间

$$(\Omega,\mathscr{A},P)=(\Omega_0\times\Omega_1\times\Omega_2\times\cdots,\mathscr{A}_0\times\mathscr{A}_1\times\mathscr{A}_2\times\cdots,P_0\times P_1\times P_2\times\cdots)$$

上,W 和 i.i.d. 随机向量列 $\{(U_n,V_n);n\geqslant1\}$ 是独立的. 由引理 4.6,存在 W 首次离开 (U_1,V_1) 的时刻 $\tau_1=\tau_{U_1,V_1}$,它是 Wiener 过程 W 的一个停时,且满足

$$W(\tau_1)\overset{\mathrm{d}}{=}X_1,\quad E\tau_1=EX_1^2=1.$$

又由引理 4.5 知 $W^{(1)}=\{W(\tau_1+t)-W(\tau_1);t\geqslant0\}$ 与 $\{W(s),U_1,V_1;0\leqslant s<\tau_1\}$ 独立,因此 Wiener 过程 $W^{(1)}$ 与 $W(\tau_1)$ 独立. 类似地,存在 $W^{(1)}$ 首次离开 (U_2,V_2) 的时刻 τ_2,它是 Wiener 过程 $W^{(1)}$ 的一个停时,且满足

$$W^{(1)}(\tau_2) = W(\tau_1 + \tau_2) - W(\tau_1) \stackrel{\text{def}}{=} X_1, \quad E\tau_2 = EX_1^2 = 1.$$

$W^{(2)} = \{W(\tau_1 + \tau_2 + t) - W(\tau_1 + \tau_2); t \geqslant 0\}$ 是Wiener 过程，它与$W(\tau_1 + \tau_2)$独立. 依此继续，我们得到满足(i) 的 i.i.d.r.v. 列$\{\tau_n; n \geqslant 1\}$ 和满足(ii) 的 i.i.d.r.v. 列

$$W(\tau_1), W(\tau_1 + \tau_2) - W(\tau_1), \cdots, W\left(\sum_{i=1}^{n} \tau_i\right) - W\left(\sum_{i=1}^{n-1} \tau_i\right), \cdots,$$

且 $W(\tau_1) \stackrel{d}{=} X_1$. 定理证毕.

注 Skorohod 原来的证明比较繁复. 这里利用鞅的简单性质，比 Skorohod 的证明要简洁一些.

Strassen 在 1964 年应用 Skorohod 嵌入定理证得了关于 i.i.d.r.v. 的部分和的著名强不变原理之后，接着又推广嵌入定理于鞅，获得关于鞅的强不变原理. 这一嵌入定理以后又被其他作者推广于更一般的情形.

§5 强不变原理

5.1 独立同分布随机变量和的强不变原理

设$\{X_n; n \geqslant 1\}$ 是概率空间$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ 上的 i.i.d.r.v. 列，$EX_1 = 0$，$\mathrm{Var}X_1 = 1$. 记 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$，$n = 1, 2, \cdots$. 定义

$$W_n(t) = n^{-1/2}\{S_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1}\}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

定理 5.1 对于给定的 i.i.d.r.v. 列$\{X_n; n \geqslant 1\}$，可构作一个新的概率空间$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{A}}, \tilde{P})$，在其上存在一个 Wiener 过程$W = \{W(t); t \geqslant 0\}$ 和一个 r.v. 列$\{\tilde{S}_n; n \geqslant 1\}$，使得

(i) $\{\tilde{S}_n; n \geqslant 1\}$ 与$\{S_n; n \geqslant 1\}$ 同分布； (5.1)

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{|\tilde{S}_n - W(n)|}{\sqrt{n\log\log n}} = 0$ a.s. (5.2)

证 对$\{X_n\}$，设$\{\tau_i\}$ 是由 Skoohod 嵌入定理定义的 i.i.d.r.v. 列. 记

$$\tilde{S}_n = W(\tau_1 + \cdots + \tau_n).$$

则(i) 被满足. 为证(ii)，注意到 $E\tau_1 = \mathrm{Var}X_1 = 1$，由 Kolmogorov 强大数律，可写 $\tau_1 + \cdots + \tau_n = n + \eta_n$，其中 $\eta_n = o(n)$ a.s. 现在我们利用定理 2.1 来导出(5.2) 式. 事实上，我们有

$$\tilde{S}_n - W(n) = W(n + \eta_n) - W(n).$$

因为$\eta_n = o(n)$ a.s. 即对任给$\varepsilon>0$，记$\Omega_\varepsilon = \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}(\eta_n \leqslant \varepsilon n) \subset \tilde{\Omega}$，有$\tilde{P}(\Omega_\varepsilon) = 1$. 这样对于$a_n = \varepsilon n$，由定理2.1有$\Omega_0 \subset \tilde{\Omega}$，$\tilde{P}(\Omega_0) = 1$. 在$\Omega_0$上，对充分大$n$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant n-a_n}\sup_{0\leqslant s\leqslant a_n}\frac{|W(t+s)-W(t)|}{\sqrt{2a_n(\log(n/a_n)+\log\log n)}} < 1+\varepsilon.$$

故对任一$\omega \in \Omega_\varepsilon \cap \Omega_0$，当$n$充分大时

$$\frac{W(n+\eta_n)-W(n)}{\sqrt{n\log\log n}}$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant n-a_n}\sup_{0\leqslant s\leqslant a_n}\frac{W(t+s)-W(t)}{\sqrt{2a_n(\log(n/a_n)+\log\log n)}}\cdot\sqrt{\frac{2a_n(\log n/a_n+\log\log n)}{n\log\log n}}$$

$$< 2\sqrt{\varepsilon}.$$

这就得证(5.2)式成立. 证毕.

注5.1　定理的结论是在新的概率空间上给出的(这可以通过扩大原概率空间，即空间的联合来给出一个新的空间). 在其上定义新的r.v.列$\{\tilde{S}_n;n\geqslant 1\}$与原r.v.列$\{S_n;n\geqslant 1\}$在同分布意义下等价. 且有Wiener过程$W=\{W(t);t\geqslant 0\}$，使(5.2)成立. 值得注意的是，在原概率空间上，不一定有Wiener过程$\{W(t);t\geqslant 0\}$使

$$S_n - W(n)/\sqrt{n\log\log n} = o(1)\quad(\text{关于}P\ \text{a.s.})$$

为简单计，以后仍简记$\tilde{S}_n$为S_n，并简称S_n可用Wiener过程来逼近.

注5.2　如果只假设i.i.d.r.v.列$\{X_n;n\geqslant 1\}$的2阶矩存在，Major(1976)指出，(5.2)中的速度是不能改进的. 当假设较高阶矩或矩母函数存在时，Komlós-Major-Tusnády(1975，1976)已经求得了可能达到的最佳速度.

利用定理5.1即可将关于Wiener过程的重对数律转移到i.i.d.r.v.列的部分和S_n上，获得如下的Strassen强不变原理. 记

$$T_n(t) = W_n(t)/\sqrt{2\log\log n},\quad 0\leqslant t\leqslant 1. \tag{5.3}$$

定理5.2(**Strassen强不变原理**)　$\{T_n(\cdot,\omega);n\geqslant 3\}$概率为1地相对紧且极限点集为$K$.

作为Strassen强不变原理的直接推论，我们有

定理5.3(Hartman-Wintner**重对数律**)　设$\{X_n;n\geqslant 1\}$是i.i.d.r.v.列，$EX_1=0$，$\mathrm{Var}X_1=1$. 记$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，$n=1,2,\cdots$，则

$$\left.\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty} S_n/\sqrt{2n\log\log n}=1\quad \text{a.s.}\\&\liminf_{n\to\infty} S_n/\sqrt{2n\log\log n}=-1\quad \text{a.s.}\end{aligned}\right\}\tag{5.4}$$

且集 $\{S_n/\sqrt{2n\log\log n};n\geqslant 3\}$ 的极限点集概率为1地与闭区间 $[-1,1]$ 重合.

证　定理的前一部分结论,即(5.4)式已在第三章§5中给出证明(作为练习,请读者利用定理5.2写出简洁证明).

为证定理的后一部分结论,只需证明:

1°　存在 Ω_0, $P(\Omega_0)=1$, 对每一 $\omega\in\Omega_0$,区间 $[-1,1]$ 被含于

$$\{S_n(\omega)/\sqrt{2n\log\log n};n\geqslant 3\}$$

的极限点集 A 中.

2°　$\{\omega:\{S_n(\omega)/\sqrt{2n\log\log n}\}$ 的极限点集包含 $[-1,1]\}$ 是可测集.

事实上,由定理5.2可知,对任一 a, $|a|\leqslant 1$, $f(t)=at\ (0\leqslant t\leqslant 1)\in K$. 故有 Ω_0, $P(\Omega_0)=1$,使对每一 $\omega\in\Omega_0$,存在子列 $\{n'(\omega)\}$ 使得 $T_{n'(\omega)}(t,\omega)\to f(t)\ (0\leqslant t\leqslant 1)$. 因此

$$S_{n'(\omega)}/\sqrt{2n'(\omega)\log\log n'(\omega)}=T_{n'(\omega)}(1,\omega)\to f(1)=a.$$

即得证1°成立.

对于2°,记 $[-1,1]$ 中全体有理数为 $r_1,r_2,\cdots$,

$$A_m=\{\omega:\liminf_{n\to\infty}|S_n(\omega)/\sqrt{2n\log\log n}-r_m|=0\}.$$

那么 A_m 是可测集 $(m=1,2,\cdots)$. 而因极限点集为闭集,故

$$\begin{aligned}A&=\{\omega:\{S_n(\omega)/\sqrt{2n\log\log n};n\geqslant 3\}\text{ 的极限点集包含}[-1,1]\}\\&=\bigcap_{m=1}^{\infty}A_m,\end{aligned}$$

因此 A 是可测集. 证毕.

习　题

1. 对 Wiener 过程 $\{W(t);t\geqslant 0\}$ 及实数 $b>0$,证明:

$$P\left\{\max_{0\leqslant j\leqslant 2^n} W(j/2^n)\geqslant b\right\}\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp(-2^{k-1}/b^2)/b\sqrt{2^k}\overset{\text{def}}{=}\beta;$$

$$P\left\{\max_{0\leqslant j\leqslant 2^n}|W(j/2^n)|\geqslant b\right\}\leqslant 2\beta.$$

2. 设 $b>0$, $M(t)=\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}W(s)$, 试证:

(i) $P\{M(t)\geqslant b\}\leqslant 2P\{W(t)\geqslant b\}$;

(ii) $P\{M(t) \leqslant -b\} \leqslant 2P\{W(t) \leqslant -b\}$;

(iii) $P\{\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t} |W(s)| \geqslant b\} \leqslant 2P\{|W(t)| \geqslant b\} = 4P\{W(1) \geqslant bt^{-1/2}\}$.

3. 试证对于 $y \geqslant 0, b \geqslant 0$ 成立

$$P\{W(t) < b - y,\ M(t) \geqslant b\} = P\{W(t) > b + y\}.$$

4. 试证 $(W(t),M(t))$ 有联合密度

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x \geqslant y \text{ 或 } y \leqslant 0, \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \cdot \dfrac{2y - x}{t^{3/2}} \exp\left(-\dfrac{(2y - x)^2}{2t}\right), & \text{其他情形}. \end{cases}$$

(提示:利用习题 3 先证

$P\{W(t) < x,\ M(t) < y\} = P\{W(t) < x\} - P\{W(t) > 2y - x\}$.)

5.* 对每一满足 $f(0) = 0$ 的 $f(t) \in C[0,1]$ 及任给的 $\varepsilon > 0$ 有

$$P\left\{\omega: \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |W(t,\omega) - f(t)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

(提示:利用表示式

$$P\{a < m(t) \leqslant M(t) < b,\ W(t) \in A\} = \int_A k(y)\mathrm{d}y,$$

其中 $m(t) = \inf\limits_{0\leqslant s\leqslant t} W(s)$, $k(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \left[\mathrm{e}^{-\frac{(y-2nc)^2}{2t}} - \mathrm{e}^{-\frac{(y-2a+2nc)^2}{2t}}\right], t > 0$, $a < 0 < b$, $c = b - a$, 且当 $a < y < b$ 时, $k(y) > 0$.)

6. 试证: $P\{$对一切 $t > 0$, $M(t) > 0\} = 1$.

(提示:注意到对 $A_n = \{W(t_n) > 0\}$, $t_n \downarrow 0$, $P(A_n) = 1/2$ 且事件 $\{A_n, \text{i.o.}\}$ 属于独立 r.v. 列 $\{W(t_{n-1}) - W(t_n); n \geqslant 2\}$ 的尾 σ 域.)

7. 设 $\{X_n; n \geqslant 1\}$ 是 i.i.d. r.v. 列, $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = 1$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$,

$$W_n(t) = n^{-1/2}\{S_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1}\}.$$

试用 Skorohod 嵌入定理证明存在一个概率空间,在其上有一 Wiener 过程 $\{W(t); t \geqslant 0\}$ 和随机过程列 $\{\tilde{S}_n(t); 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ 使对每一 $n \geqslant 1$,

$$\{\tilde{S}_n(t); 0 \leqslant t \leqslant 1\} \overset{d}{=} \{W_n(t); 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

且

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |\tilde{S}_n(t) - W(t)| \xrightarrow{P} 0.$$

第六章　Banach 空间上概率极限理论

Banach 空间上的概率论始于 50 年代对向量值随机变量的大数律和中心极限定理的研究. 随着对 Banach 空间局部理论和几何结构研究的发展，至 80 年代末，Banach 空间上的概率论已取得重大成果. 等周方法，特别是乘积空间上等周不等式的发现，使得向量值随机变量的各种强极限定理几乎可以被完整地描述. 另外，Banach 空间上概率极限理论的研究与随机过程，特别是 Gauss 过程，正则性的研究是相互渗透，互相推进的.

本章将对可分 Banach 空间值随机变量的大数律、中心极限定理和重对数律等基本结果作一介绍. 这些不仅是实值情形相应结果的推广，而且使我们能清楚地认识强、弱极限定理间的内在联系. 限于篇幅，在此不介绍等周不等式这一强有力的工具，有兴趣的读者可参见[16].

§1　B 值随机变量的基本性质

在这一节中，将给出 B 值 r.v. 的基本概念，建立一些重要的概率不等式，并讨论 B 值 Gauss r.v. 的可积性.

令 B 为 $\mathbf{R}$ 上可分的 Banach 空间，具有范数 $\|\cdot\|$. B' 表示 B 的拓扑对偶. 当 $x\in B$, $f\in B'$ 时，$f(x)=\langle f,x\rangle$. $f\in B'$ 的范数仍记为 $\|f\|$. B 的所有开集生成 Borel σ 域 $\mathscr{B}$. 设概率空间 $(\Omega,\mathscr{A},P)$ 足够大，可以在其上定义我们所讨论的一切 r.v. 称从 $(\Omega,\mathscr{A})$ 到 $(B,\mathscr{B})$ 的可测映射 X 为 B 值 r.v.，并且称 X 在 P 下的象概率测度 $\mu=\mu_X$ 为 X 的分布. 对 B 上任何实值有界可测函数 φ，记

$$E\varphi(X)=\int_B\varphi(x)\mathrm{d}\mu(x). \tag{1.1}$$

因 B 是可分的，$\mathscr{B}$ 也可由柱集生成. 从而 X 的分布将由有限维投影所确定，即如果 X 和 Y 都是 B 值 r.v.，且对每个 $f\in B'$，实值 r.v. $f(X)$ 和 $f(Y)$ 的分布相同，则 $\mu_X=\mu_Y$. 特别，B' 上的特征泛函

$$E\exp(\mathrm{i}f(X))=\int_B\exp(\mathrm{i}f(x))\mathrm{d}\mu(x),\quad f\in B' \tag{1.2}$$

将完全确定 X 的分布.

设 $0 < p < \infty$，X 为 B 值 r.v.，如果 $E\|X\|^p = \int_\Omega \|X\|^p dP < \infty$，则称 X 为 p 阶可积的，并记 $\|X\|_p = (E\|X\|^p)^{1/p}$. 如果 $\|X\|_\infty \overset{\text{def}}{=} \text{esssup}\|X\| < \infty$，则称 X 为有界的. 当 $E\|X\| < \infty$ 时，存在 $z \in B$ 使对所有 $f \in B'$，$Ef(X) = f(z)$. 此时令 $EX = z$，称为 X 的数学期望或均值. 特别，如果对所有 $f \in B'$，$Ef(X) = 0$，则 $EX = 0$. 用 $L_p(B) = L_p(\Omega, \mathscr{A}, P; B)$ 表示所有 p 阶可积的 B 值 r.v. 组成的集合. 当 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 时，$L_p(B)$ 关于 $\|\cdot\|_p$ 是一个 Banach 空间. 令 F 为 $\mathbf{R}_+$ 上的凸函数，X 和 Y 为独立的 B 值 r.v. 且 $EF(\|X\|) < \infty$，$EF(\|Y\|) < \infty$. 如果 $EY = 0$，则由 Fubini 定理可证得 $EF(\|X\|) \leqslant EF(\|X+Y\|)$. 事实上

$$\begin{aligned} EF(\|X\|) &= E_X F(\|X + E_Y Y\|) \leqslant E_X F(E_Y(\|X+Y\|)) \\ &\leqslant E_X E_Y F(\|X+Y\|) = EF(\|X+Y\|). \end{aligned}$$

设 X 是 B 值 r.v.，如果 X 和 $-X$ 的分布相同，则称 X 为**对称的**. 令 ε 是 Rademacher r.v.，即 $P(\varepsilon = 1) = P(\varepsilon = -1) = 1/2$. 设 ε 与 X 相互独立. 则 X 为对称的 r.v. 当且仅当 X 与 εX 的分布相同. 一列独立的 Rademacher r.v. $\{\varepsilon_i\}$ 称为 Rademacher 序列. 以下总设 $\{\varepsilon_i\}$ 与其他所有 r.v. 都相互独立. 一列 B 值 r.v. $\{X_i\}$ 称为**对称序列**，如果 $\{X_i\}$ 与 $\{\varepsilon_i X_i\}$ 有相同分布. 当 $\{X_i\}$ 是一列独立对称的 B 值 r.v. 时，则 $\{X_i\}$ 为对称序列. 对称化技巧是研究 B 值 r.v. 的强有力工具. 任给一个 B 值 r.v. X，可以构造一个与 X 独立同分布的 r.v. X'，定义 $\tilde{X} = X - X'$. 显然，$\tilde{X}$ 是对称的，且 X 与 $\tilde{X}$ 的分布密切相关. 事实上，对 $t, a > 0$，

$$P\{\|X\| \leqslant a\} P\{\|X\| > t + a\} \leqslant P(\|\tilde{X}\| > t). \tag{1.3}$$

如果 a 满足 $P\{\|X\| \leqslant a\} \geqslant 1/2$，则(1.3) 可写成

$$P\{\|X\| > t + a\} \leqslant 2P(\|\tilde{X}\| > t). \tag{1.4}$$

特别，$E\|X\|^p < \infty$ $(0 < p < \infty)$ 当且仅当 $E\|\tilde{X}\|^p < \infty$. 另外，(1.3) 也可作如下改进：对 $t, a > 0$，

$$\inf_{f \in B'} P\{|f(X)| \leqslant a\} P\{\|X\| > t + a\} \leqslant P(\|\tilde{X}\| > t).$$

称 X 为 B 值 Gauss r.v.，如果对任何 $f \in B'$，$f(X)$ 是实值 Gauss r.v. 设 $\{x_i\}$ 是 B 中一列元，$\{g_i\}$ 为一列独立标准正态 r.v.，那么收敛级数 $\sum_{i=1}^{\infty} g_i x_i$ 所定义的就是 B 值 Gauss r.v. B 值 Gauss r.v. 范数的平方具有指数可积性(即(1.5) 成立)，并且所有阶矩相互等价(即满足(1.6))，这就是

定理 1.1　令 X 是 B 值 Gauss r.v.，则存在 $C > 0$ 使得

$$E\exp(\|X\|^2/C)<\infty, \tag{1.5}$$

且对任何 $0<p,q<\infty$，存在仅依赖于 p,q 的常数 $K_{p,q}$ 使得

$$\|X\|_p\leqslant K_{p,q}\|X\|_q. \tag{1.6}$$

特别，$K_{p,2}=K\sqrt{p}$，$p\geqslant 2$，K 是常数.

证 令 B 值 r.v. Y 是与 X 独立同分布的. 由 Gauss r.v. 的旋转不变性，$(X+Y)/\sqrt{2}$ 与 $(X-Y)/\sqrt{2}$ 相互独立且都和 X 同分布. 任给 $\varepsilon>1/2$，取 $s>0$ 满足 $P\{\|X\|\leqslant s\}\geqslant\varepsilon$. 则当 $t>s$ 时

$$\begin{aligned}P\{\|X\|\leqslant s\}P\{\|X\|>t\} &= P\{\|X+Y\|\leqslant\sqrt{2}s,\ \|X-Y\|>\sqrt{2}t\}\\ &\leqslant P\{\|X\|>(t-s)/\sqrt{2},\ \|Y\|>(t-s)/\sqrt{2}\}\\ &=(P\{\|X\|>(t-s)/\sqrt{2}\})^2.\end{aligned}$$

因此

$$\frac{P\{\|X\|>t\}}{P\{\|X\|\leqslant s\}}\leqslant\left(\frac{P\{\|X\|>(t-s)/\sqrt{2}\}}{P\{\|X\|\leqslant s\}}\right)^2. \tag{1.7}$$

令 $t=t_n=(\sqrt{2^{n+1}}-1)(\sqrt{2}+1)s$，$n\geqslant 1$. 重复使用(1.7)式，得

$$\begin{aligned}\frac{P\{\|X\|>t_n\}}{P\{\|X\|\leqslant s\}}&\leqslant\left(\frac{P\{\|X\|>(t_n-s)/\sqrt{2}\}}{P\{\|X\|\leqslant s\}}\right)^2\\ &=\left(\frac{P\{\|X\|>t_{n-1}\}}{P\{\|X\|\leqslant s\}}\right)^2\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{2^n}.\end{aligned}$$

即有 $P\{\|X\|>t_n\}\leqslant\exp\left\{-2^n\log\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right\}$. 对任何 $t>s$，存在 $n\geqslant 1$，使 $t_n\leqslant t\leqslant t_{n+1}$. 这样我们有

$$\begin{aligned}P\{\|X\|>t\}&\leqslant P\{\|X\|>t_n\}\leqslant\exp(-2^n\log(\varepsilon/(1-\varepsilon)))\\ &\leqslant\exp\left\{-\frac{t^2}{24s^2}\log\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right\}.\end{aligned} \tag{1.8}$$

简单的分部积分计算表明存在 $C>0$ 使得 $E\exp(\|X\|^2/C)<\infty$.

下面证明第二个结论. 首先令 $q=1$，$p>1$. 取 $s=4E\|X\|$，$\varepsilon=3/4$. 由(1.8)有

$$\begin{aligned}E\|X\|^p&=\left(\int_0^s+\int_s^\infty\right)P\{\|X\|>t\}\mathrm{d}t^p\\ &\leqslant s^p+\int_s^\infty\exp\left\{-\frac{t^2}{24s^2}\log 3\right\}\mathrm{d}t^p\leqslant(K\sqrt{p}s)^p,\end{aligned}$$

其中 K 为常数.

对于 $q<1<p$，令 θ 满足 $1=\frac{\theta}{q}+\frac{1-\theta}{p}$. 由 Hölder 不等式

$$E\|X\|=E\|X\|^{\theta}\|X\|^{1-\theta}\leqslant(E\|X\|^{q})^{\theta/q}(E\|X\|^{p})^{(1-\theta)/p}$$

$$\leqslant(4K\sqrt{p}E\|X\|)^{1-\theta}\|X\|_q^{\theta}.$$

这样，$E\|X\|\leqslant(4K\sqrt{p})^{\frac{1-\theta}{\theta}}\|X\|_q$，$\|X\|_p\leqslant 4K\sqrt{p}E\|X\|\leqslant(4K\sqrt{p})^{1/\theta}\|X\|_q$.

当 $0<q<p<1$ 时，定义 θ 满足 $1=\frac{\theta}{q}+\frac{1-\theta}{2}$. 因此

$$\|X\|_p\leqslant E\|X\|\leqslant(4K\sqrt{2})^{\frac{1-\theta}{\theta}}\|X\|_q.$$

定理证毕.

下面介绍一些关于 B 值r.v.列部分和最大值的概率不等式. 其中Levy和Ottaviani不等式是实值情形相应结果的拓广，而Hoffmann Jørgensen不等式和压缩原理是为研究 B 值r.v.而建立的.

定理 1.2(Levy 不等式) 令 $\{X_i;1\leqslant i\leqslant N\}$ 是 B 值对称r.v.，记 $S_k=\sum_{i=1}^{k}X_i$，$1\leqslant k\leqslant N$，则对每个 $t>0$，

$$P\{\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|S_k\|>t\}\leqslant 2P\{\|S_N\|>t\}, \tag{1.9}$$

$$P\{\max_{1\leqslant i\leqslant N}\|X_i\|>t\}\leqslant 2P\{\|S_N\|>t\}. \tag{1.10}$$

特别，对任何 $0<p<\infty$，

$$E\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|S_k\|^p\leqslant 2E\|S_N\|^p,\quad E\max_{1\leqslant i\leqslant N}\|X_i\|^p\leqslant 2E\|S_N\|^p.$$

证 仅证(1.9)，(1.10)可类似证明. 令 $\tau=\inf\{k:k\leqslant N,\|S_k\|>t\}$. 易见 $\{\tau=k\}$ 仅依赖于 $X_1,X_2,\cdots,X_k$. 由于对每一 $k\geqslant1$，$(X_1,\cdots,X_k,-X_{k+1},\cdots,-X_N)$ 与 $(X_1,\cdots,X_k,X_{k+1},\cdots,X_N)$ 的分布相同，故

$$P\{\|S_N\|>t\}=\sum_{k=1}^{N}P\{\|S_N\|>t,\tau=k\}$$

$$=\sum_{k=1}^{N}P\{\|S_k-R_k\|>t,\tau=k\},$$

其中 $R_k=S_N-S_k$，$1\leqslant k\leqslant N$.

另一方面，由三角不等式

$$2\|S_k\|\leqslant\|S_k+R_k\|+\|S_k-R_k\|=\|S_N\|+\|S_k-R_k\|,$$

因此

$$P\{\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|S_k\|>t\}=\sum_{k=1}^{N}P\{\tau=k\}$$

$$< \sum_{k=1}^{N}(P\{\|S_N\| > t, \tau = k\} + P\{\|S_k - R_k\| > t, \tau = k\})$$

$$= 2P\{\|S_N\| > t\}.$$

定理证毕.

作为 Levy 不等式的一个重要应用,我们有

定理 1.3(压缩原理) 令 $F: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ 是凸函数. 设 $x_i \in B$, $1 \leqslant i \leqslant N$, 实数 α_i 满足 $|\alpha_i| \leqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant N$. 则

$$EF\left(\left\|\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\varepsilon_i x_i\right\|\right) \leqslant EF\left(\left\|\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i x_i\right\|\right), \tag{1.11}$$

且对任何 $t > 0$,

$$P\left\{\left\|\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\varepsilon_i x_i\right\| > t\right\} \leqslant 2P\left\{\left\|\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i x_i\right\| > t\right\}. \tag{1.12}$$

证 在 $\mathbf{R}^N$ 上定义函数 $\varphi: (\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \to EF\left(\left\|\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\varepsilon_i x_i\right\|\right)$. 显然 φ 是凸函数,并且在紧凸集 $[-1,1]^N$ 上,φ 在某一极点处达到最大值. 即存在 $\alpha_1^0, \cdots, \alpha_N^0$ 满足 $\alpha_i^0 = 1$ 或 -1 使得

$$\max_{|\alpha_i| \leqslant 1} EF\left(\left\|\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\varepsilon_i x_i\right\|\right) = EF\left(\left\|\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^0\varepsilon_i x_i\right\|\right).$$

由于 $\{\varepsilon_i\}$ 的对称性, $EF\left(\left\|\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^0\varepsilon_i x_i\right\|\right) = EF\left(\left\|\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i x_i\right\|\right)$. 这样(1.11)式成立.

由 $\{\varepsilon_i\}$ 的对称性,不妨设 $\alpha_i \geqslant 0$. 进而由 $\{\varepsilon_i; 1 \leqslant i \leqslant N\}$ 同分布,可设 $\alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_N \geqslant \alpha_{N+1} = 0$. 令 $S_k = \sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i x_i$, $1 \leqslant k \leqslant N$, 则 $\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\varepsilon_i x_i = \sum_{k=1}^{N}\alpha_k(S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^{N}(\alpha_k - \alpha_{k+1})S_k$, 所以

$$\left\|\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\varepsilon_i x_i\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{N}(\alpha_k - \alpha_{k+1})\|S_k\| \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant N}\|S_k\|. \tag{1.13}$$

由(1.13)和 Levy 不等式即得(1.12). 定理证毕.

如果 $\{X_i\}$ 相互独立但不具对称性,则可用如下结果代替 Lévy 不等式.

定理 1.4(Ottaviani 不等式) 令 $\{X_i; 1 \leqslant i \leqslant N\}$ 是 B 值独立 r.v., 记 $S_k = \sum_{i=1}^{k}X_i$, $1 \leqslant k \leqslant N$, 则对任何 $s, t > 0$

$$P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|S_k\| > t + s\right\} \leqslant \frac{P\{\|S_N\| > t\}}{1 - \max\limits_{1\leqslant k\leqslant N}P\{\|S_N - S_k\| > s\}}. \tag{1.14}$$

证 令 $\tau = \inf\{k: k \leqslant N, \|S_k\| > t + s\}$, 其中 $\inf\varnothing = \infty$. 那么 $\{\tau = k\}$

仅依赖于 $X_1, X_2, \cdots, X_k$，且

$$P\left\{\max_{1\le k\le N}\|S_k\|>t+s\right\}=\sum_{k=1}^{N}P\{\tau=k\}.$$

当 $\tau=k$ 且 $\|S_N-S_k\|\le s$ 时，有 $\|S_N\|>t$. 故由独立性

$$\begin{aligned}P\{\|S_N\|>t\}&=\sum_{k=1}^{N}P\{\tau=k,\ \|S_N\|>t\}\\&\ge\sum_{k=1}^{N}P\{\tau=k,\ \|S_N-S_k\|\le s\}\\&\ge\inf_{k\le N}P\{\|S_N-S_k\|\le s\}\sum_{k=1}^{N}P\{\tau=k\}.\end{aligned}$$

得证(1.14)式成立. 定理证毕.

下列 Hoffmann-Jørgensen 不等式在 B 值 r.v. 部分和的可积性研究中起着重要作用.

定理 1.5(Hoffmann-Jørgensen 不等式)　令 $\{X_i;1\le i\le N\}$ 是 B 值独立 r.v.，记 $S_k=\sum_{i=1}^{k}X_i$, $k\le N$，则对任何 $s,t>0$

$$P\left\{\max_{1\le k\le N}\|S_k\|>3t+s\right\}\le\left(P\left\{\max_{1\le k\le N}\|S_k\|>t\right\}\right)^2+P\left\{\max_{1\le i\le N}\|X_i\|>s\right\}. \tag{1.15}$$

进一步，若 $\{X_i;1\le i\le N\}$ 又是对称的，则

$$P\{\|S_N\|>2t+s\}\le 4(P\{\|S_N\|>t\})^2+P\left\{\max_{1\le i\le N}\|X_i\|>s\right\}. \tag{1.16}$$

证　令 $\tau=\inf\{j: j\le N, \|S_j\|>t\}$. 那么 $\{\tau=j\}$ 仅依赖于 $X_1,X_2,\cdots,X_j$，并且 $\{\max_{1\le k\le N}\|S_k\|>t\}=\sum_{j=1}^{N}\{\tau=j\}$. 另外在 $\{\tau=j\}$ 上

$$\begin{aligned}&\|S_k\|\le t, && k<j,\\&\|S_k\|\le t+\|X_j\|+\|S_k-S_j\|, && k\ge j.\end{aligned}$$

总之，$\max_{1\le k\le N}\|S_k\|\le t+\max_{1\le i\le N}\|X_i\|+\max_{k\le j\le N}\|S_k-S_j\|$. 由此及独立性得

$$\begin{aligned}P\left\{\max_{1\le k\le N}\|S_k\|>3t+s\right\}&=\sum_{j=1}^{N}P\left\{\tau=j,\max_{1\le k\le N}\|S_k\|>3t+s\right\}\\&\le\sum_{j=1}^{N}P\left\{\tau=j,\max_{j<k\le N}\|S_k-S_j\|>2t\right\}\\&\quad+\sum_{j=1}^{N}P\left\{\tau=j,\max_{1\le i\le N}\|X_i\|>s\right\}\end{aligned}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{N} P\{\tau = j\} P\left\{ \max_{j<k\leqslant N} \| S_k - S_j \| > 2t \right\}$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} P\left\{ \tau = j, \max_{1\leqslant i\leqslant N} \| X_i \| > s \right\}$$

$$\leqslant \left(P\left\{ \max_{1\leqslant k\leqslant N} \| S_k \| > t \right\} \right)^2 + P\left\{ \max_{1\leqslant i\leqslant N} \| X_i \| > s \right\}, \quad (1.17)$$

即第一个结论成立.

现证(1.16)式. 对每一 $1 \leqslant j \leqslant N$,

$$\| S_N \| \leqslant \| S_{j-1} \| + \| X_j \| + \| S_N - S_j \|.$$

类似于(1.17)式,我们有

$$P\{ \| S_N \| > 2t + s \} = \sum_{j=1}^{N} P\{ \tau = j, \| S_N \| > 2t + s \}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{N} P\{\tau = j\} P\{ \| S_N - S_j \| > t \} + \sum_{j=1}^{N} P\left\{ \tau = j, \max_{1\leqslant i\leqslant N} \| X_i \| > s \right\}.$$

由 Lévy 不等式得证(1.16)式成立. 证毕.

推论 1.1 设 $0 < p < \infty$, $\{X_i; 1 \leqslant i \leqslant N\}$ 是 $L_p(B)$ 中的独立 r.v.,记 $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i, 1 \leqslant k \leqslant N$. 定义 $t_0 = \inf\{t: t > 0, P(\max_{k\leqslant N} \| S_k \| > t) \leqslant (2 \cdot 4^p)^{-1}\}$,则

$$E \max_{k\leqslant N} \| S_k \|^p \leqslant 2 \cdot 4^p E \max_{1\leqslant i\leqslant N} \| X_i \|^p + 2(4t_0)^p. \quad (1.18)$$

进而若 X_i 是对称的,定义 $t_0 = \inf\{t: t > 0, P(\| S_N \| > t) \leqslant (8 \cdot 3^p)^{-1}\}$,则

$$E \| S_N \|^p \leqslant 2 \cdot 3^p E \max_{1\leqslant i\leqslant N} \| X_i \|^p + 2(3t_0)^p. \quad (1.19)$$

证 仅证(1.19),(1.18)可类似地证明. 令 $u > t_0$. 由(1.16)及分部积分公式有

$$E \| S_N \|^p = \int_0^\infty P\{ \| S_N \| > t \} \mathrm{d}t^p$$

$$= 3^p \left(\int_0^u + \int_u^\infty \right) P\{ \| S_N \| > 3t \} \mathrm{d}t^p$$

$$\leqslant 3^p u^p + 4 \cdot 3^p \int_u^\infty (P(\| S_N \| > t))^2 \mathrm{d}t^p$$

$$+ 3^p \int_u^\infty P\left\{ \max_{1\leqslant i\leqslant N} \| X_i \| > t \right\} \mathrm{d}t^p$$

$$\leqslant 3^p u^p + 4 \cdot 3^p P\{ \| S_N \| > u \} \int_0^\infty P\{ \| S_N \| > t \} \mathrm{d}t^p$$

$$+ 3^p E \max_{1\leqslant i\leqslant N} \| X_i \|^p$$

$$\leqslant 3^p u^p + \frac{1}{2} E \| S_N \|^p + 3^p E \max_{1\leqslant i\leqslant N} \| X_i \|^p.$$

经过变形得

$$E \| S_N \|^p \leqslant 2 \cdot 3^p u^p + 2 \cdot 3^p E \max_{1\leqslant i\leqslant N} \| X_i \|^p.$$

既然 $u > t_0$ 可任意选取，得(1.19)式成立. 证毕.

推论 1.2 设 $0 < p < \infty$，$\{X_i; i \geqslant 1\}$ 是一列独立 B 值 r.v.，令 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, n \geqslant 1$. 如果 $\sup_n \| S_n \| < \infty$ a.s. 那么下列条件等价：

(i) $E \sup_n \| S_n \|^p < \infty$；

(ii) $E \sup_n \| X_n \|^p < \infty$.

如果 S_n a.s. 收敛，则(i)和(ii)等价于

(iii) $E \| \sum_{i=1}^{\infty} X_i \|^p < \infty$.

非常有趣的是 Borel Cantelli 引理的独立部分可以从推论2得到. 事实上，若 $\{A_n; n \geqslant 1\}$ 是一列独立事件，且 $P\{A_n, \text{i.o.}\} = 0$，即 $\sum_{n=1}^{\infty} I(A_n)$ a.s. 收敛，那么 $\sum_{n=1}^{\infty} EI(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$.

§2 中心极限定理

设 X 是 B 值 r.v.，$\{X_i; i \geqslant 1\}$ 是一列与 X 同分布的独立 r.v.，记 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. 如果 $S_n / \sqrt{n}$ 弱收敛，则称 X 满足**中心极限定理**，并记作 $X \in \mathrm{CLT}(B)$.

当 $B = \mathbf{R}$ 时，$X \in \mathrm{CLT}(\mathbf{R})$ 当且仅当 $EX = 0$，$EX^2 < \infty$. 此时 $S_n / \sqrt{n}$ 弱收敛于正态分布 $N(0, \sigma^2)$，$\sigma^2 = EX^2$. 对一般 Banach 空间 B，如果 $X \in \mathrm{CLT}(B)$，那么对任何 $f \in B'$，$f(X) \in \mathrm{CLT}(\mathbf{R})$. 因此 $Ef(X) = 0$，$Ef(X)^2 < \infty$，且 $S_n / \sqrt{n}$ 弱收敛于一个 B 值 Gauss r.v. $G = G(X)$，其中 G 与 X 具有相同的协方差结构(即 $Ef(G)^2 = Ef(X)^2$)，此时称 X 为预 Gauss r.v. 然而 $E\| X \|^2 < \infty$ 既不是 $X \in \mathrm{CLT}(B)$ 的充分条件，也不是必要条件. 正如下面结果所表明的那样，$X \in \mathrm{CLT}(B)$ 不仅与 X 的概率性质有关，而且依赖于 Banach 空间 B 的几何结构. 我们将从满足中心极限定理的 B 值 r.v. X 的范数的可积性的讨论开始.

定理 2.1 若 $X \in \mathrm{CLT}(B)$，那么 $EX = 0$，且

$$\lim_{t\to\infty} t^2 P\{\|X\| > t\} = 0. \tag{2.1}$$

特别，当 $0 < p < 2$ 时，$E\|X\|^p < \infty$.

证 仅给出(2.1)的证明. 首先假设 X 是对称的 r.v. 令 $0<\varepsilon\leqslant 1$，$G = G(X)$ 表示 $S_n/\sqrt{n}$ 的极限 r.v.，故对任何 $t > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} P\{\|S_n\|/\sqrt{n} > t\} \leqslant P\{\|G\| > t\}. \tag{2.2}$$

因 G 是 Gauss r.v.，$E\|G\|^2 < \infty$. 因此可选 $t_0 = t_0(\varepsilon)(\geqslant \varepsilon)$ 充分大使得 $P\{\|G\| > t_0\} \leqslant \varepsilon/t_0^2$. 由(2.2)，存在 $n_0 = n_0(\varepsilon)$，当 $n \geqslant n_0$ 时，

$$P\{\|S_n\|/\sqrt{n} > t_0\} \leqslant 2\varepsilon/t_0. \tag{2.3}$$

又由 Lévy 不等式有

$$P\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|X_i\| > t_0\sqrt{n}\right\} \leqslant 4\varepsilon/t_0^2 \qquad (\leqslant 1/2).$$

再由 $\{X_i\}$ 独立同分布推得

$$nP\{\|X\| > t_0\sqrt{n}\} \leqslant 8\varepsilon/t_0^2. \tag{2.4}$$

由此从(2.4)可推出

$$\limsup_{t\to\infty} t^2 P\{\|X\| > t\} \leqslant 16\varepsilon.$$

由 ε 任意性得证 $\lim\limits_{t\to\infty} t^2P\{\|X\| > t\} = 0$.

如果 X 不对称，令 X' 与 X 独立同分布，记 $\tilde{X} = X - X'$，则 $\tilde{X} \in \mathrm{CLT}(B)$. 由已证的结果有

$$\lim_{t\to\infty} t^2 P\{\|\tilde{X}\| > t\} = 0.$$

令 u 满足 $P\{\|X\| \leqslant u\} \geqslant 1/2$. 由(1.4)得

$$P\{\|X\| > t + u\} \leqslant 2P\{\|\tilde{X}\| > t\},$$

所以仍成立着 $\lim\limits_{t\to\infty} t^2P\{\|X\| > t\} = 0$. 证毕.

推论 2.1 如果 $X \in \mathrm{CLT}(B)$，则

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^2 \sup_n P\{\|S_n\|/\sqrt{n} > t\} = 0. \tag{2.5}$$

特别，对 $0 < p < 2$，$\sup\limits_n E\|S_n/\sqrt{n}\|^p < \infty$.

证 对任何给定的 k，记 $Y = S_k/\sqrt{k}$. 令 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 相互独立与 Y 同分布. 则 $\sum\limits_{i=1}^{m} Y_i/\sqrt{m}$ 与 $S_{mk}/\sqrt{mk}$ 同分布. 在定理 2.1 的证明中用 Y 代替 X 即得. 证毕.

为方便计，记 $\mathrm{CLT}(X) = \sup\limits_n E\|S_n\|/\sqrt{n}$.

称 X 满足**有界中心极限定理**，记作 $X \in \mathrm{BCLT}(B)$，如果 $S_n/\sqrt{n}$ 依概率有界，即对任给 $\varepsilon > 0$，存在 $M > 0$ 使得 $\sup\limits_n P\{\|S_n\|/\sqrt{n} > M\} < \varepsilon$。定理 2.1 及其推论 2.1 的证明表明，若 $X \in \mathrm{BCLT}(B)$，那么 $EX = 0$ 且 $\sup\limits_{t>0}\sup\limits_n t^2 P\{\|S_n\|/\sqrt{n} > t\} < \infty$。

当 $B = \mathbf{R}$ 时，$X \in \mathrm{BCLT}(\mathbf{R})$ 等价于 $X \in \mathrm{CLT}(\mathbf{R})$。在此我们运用 §1 的结果证明之。此时只需证明从 $X \in \mathrm{BCLT}(\mathbf{R})$ 可推出 $EX = 0$，$EX^2 < \infty$。

首先假设 X 是对称的。对 $n \geqslant 1$，$i = 1,2,\cdots,n$，令

$$u_i = u_i(n) = X_i I(|X_i| \leqslant \sqrt{n})/\sqrt{n}. \tag{2.6}$$

由压缩原理有

$$P\{\left|\sum_{i=1}^n u_i\right| > t\} \leqslant 2P\{|S_n|/\sqrt{n} > t\}.$$

当 $X \in \mathrm{BCLT}(\mathbf{R})$ 时，可选 t_0（与 n 无关）满足 $P\{|S_n|/\sqrt{n} > t_0\} < 1/144$。由此即得

$$P\{\left|\sum_{i=1}^n u_i\right| > t_0\} < 1/72.$$

从 (1.19) 式知 $E\left|\sum\limits_{i=1}^n u_i\right|^2 \leqslant 18(1 + t_0^2)$。因 $\{u_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 是 i.i.d.r.v. 且是对称的，所以 $E|X|^2 I(|X| \leqslant \sqrt{n}) \leqslant 18(1 + t_0^2)$。让 $n \to \infty$，得证 $E|X|^2 < \infty$。

若 X 不对称，定义 X' 与 X 独立同分布，令 $\tilde{X} = X - X'$。显然 $\tilde{X} \in \mathrm{BCLT}(\mathbf{R})$。由上面已证的结论，$E\tilde{X}^2 < \infty$。它等价于 $EX^2 < \infty$。由第三章知从大数律可推得 $EX = 0$。

然而，对于一般的 Banach 空间 B，$X \in \mathrm{BCLT}(B)$ 不能推出 $X \in \mathrm{CLT}(B)$。考虑 $B = C_0$*)，用 $\{e_k; k \geqslant 1\}$ 表示 C_0 的标准单位基，令

$$X = \{\varepsilon_k e_k/(2\log(k+1))^{1/2}, k \geqslant 1\}, \tag{2.7}$$

则 $X \in \mathrm{BCLT}(C_0)$。

事实上，对任何 $M > 0$，

$$
\begin{aligned}
P\{\|S_n\|/\sqrt{n} > M\}
&= 1 - \prod_{k=1}^{\infty}\left\{1 - P\left\{\left|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i\right|\Big/\sqrt{n} > M(2\log(k+1))^{1/2}\right\}\right\} \\
&\leqslant 1 - \prod_{k=1}^{\infty}(1 - 2\exp(-M^2\log(k+1)))
\end{aligned}
$$

---

*) 空间 C_0 为一切 $x = \{x_n\}$，$x_n \to 0\ (n \to \infty)$，$\|x\| = \sup\limits_n |x_n|$。

$$< 4\sum_{k=\cdot}^{\infty}\exp(\quad M^2\log(k+1)). \tag{2.8}$$

但 X 不是预Gauss r.v.，因为与 X 具有相同协方差结构的Gauss r.v. G 应具有下述形式：

$$G = \{g_k e_k/(2\log(k+1))^{1/2}; k \geqslant 1\}, \tag{2.9}$$

其中$\{g_k; k \geqslant 1\}$ 为独立的标准正态 r.v. 列. 而另一方面

$$\limsup_{k\to\infty} |g_k|/(2\log(k+1))^{1/2} = 1 \text{ a.s.},$$

即 $G \in C_0$.

回顾 B 上概率测度列弱收敛的一般准则，第四章 Prohorov 定理(定理 4.5) 指出：B 上概率测度列$\{P_n\}$ 是弱相对紧的当且仅当它是一致胎紧的，即对每个 $\varepsilon > 0$，存在 B 的紧子集 K 使得对一切 $n \geqslant 1$

$$P_n(K) > 1 - \varepsilon. \tag{2.10}$$

对于 B 的紧子集的刻画，我们有

引理 2.1 B 的子集 K 是紧的当且仅当

(i) K 有界；

(ii) 对每一 $\varepsilon>0$，存在B的有限维子空间F使对任一$x\in K$，$d(x,F)<\varepsilon$.

若 F 是 B 的闭子空间，$T = T_F$ 表示 B 到 B/F 的商映射，记 $\|T(x)\| = d(x,F)$，$x \in B$.

由(2.10) 和引理 2.2，我们可以看出，如果对每一 $\varepsilon > 0$，存在 B 的有界子集 L，满足：

$$P_n(L) > 1 - \varepsilon, \quad n \geqslant 1, \tag{2.11}$$

且有一个有限维子空间 F，满足：

$$P_n\{x; d(x,F) < \varepsilon\} > 1 - \varepsilon, \quad n \geqslant 1, \tag{2.12}$$

那么$\{P_n, n \geqslant 1\}$ 是弱相对紧的.

实际上，当(2.12) 成立时，(2.11) 可放宽为对每一 $f \in B'$，$\{P_n \circ f^{-1}\}$ 是弱相对紧的.

应用上面的讨论可得：$X \in \mathrm{CLT}(B)$ 当且仅当对任何 $\varepsilon > 0$，存在 B 的紧子集 K 使得对 $n \geqslant 1$ 有

$$P\{S_n/\sqrt{n} \in K\} > 1 - \varepsilon. \tag{2.13}$$

等价地，对每一 $f \in B'$，$f(X) \in \mathrm{CLT}(\mathbf{R})$ 且对任何 $\varepsilon > 0$，存在有限维闭子空间 F 使得对 $n \geqslant 1$ 有

$$P\{\|T(S_n/\sqrt{n})\| > \varepsilon\} < \varepsilon. \tag{2.14}$$

进而由定理 2.1 及其推论的证明可以看出(2.14) 等价于$\mathrm{CLT}(T(X)) < \varepsilon$. 特

别，如果对每一 $\varepsilon>0$，存在一个零均值简单 r.v. Y 使得 $\mathrm{CLT}(X-Y)<\varepsilon$，则 $X\in\mathrm{CLT}(B)$. 另外，$X\in\mathrm{CLT}(B)$ 当且仅当 $X-X'\in\mathrm{CLT}(B)$，也当且仅当 $\varepsilon X\in\mathrm{CLT}(B)$，其中 X 与 X' 独立同分布，ε 为 Rademacher r.v.

一般地，难以找到一个仅依赖于 X 的分布的条件，使得 X 满足中心极限定理. 但在特殊的一类空间上，如 2 型和 2 余型空间上，恰有相当完满的结果. 为此引入下列定义.

定义 2.1　令 $\{\varepsilon_i\}$ 为 Rademacher 序列.

(i) 设 $1\leqslant p\leqslant 2$，称 Banach 空间 B 为 p 型空间，如果存在常数 $C>0$，使对 B 中任意 $n(\geqslant 1)$ 个元 $x_1,\cdots,x_n$

$$E\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i\right\|^p\leqslant C\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\right)^{1/p};$$

(ii) 设 $2\leqslant q<\infty$，称 Banach 空间 B 为 q 余型空间，如果存在常数 $C>0$ 使对 B 中任意 $n(\geqslant 1)$ 个元 $x_1,\cdots,x_n$

$$E\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i\right\|^q\geqslant C\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^q\right)^{1/q}.$$

由定义可知，每一 Banach 空间都是 1 型和 ∞ 余型空间.

定理 2.2　设 B 是 2 型空间，X 是 B 值 r.v.，若 $EX=0$，$E\|X\|^2<\infty$，则 $X\in\mathrm{CLT}(B)$.

证　设 $\{X,X_i;i\geqslant 1\}$ 是 i.i.d. 的. 由 Fubini 定理及 2 型空间的定义，存在常数 $C>0$，使得

$$\begin{aligned}\mathrm{CLT}(X)&=\sup_n E\left\|\sum_{i=1}^{n}X_i/\sqrt{n}\right\|\leqslant 2\sup_n E\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i X_i/\sqrt{n}\right\|\\&=2\sup_n\left\{E_X E_\varepsilon\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i X_i/\sqrt{n}\right\|^2\right\}^{1/2}\leqslant 2C\sup_n\left\{E_X\sum_{i=1}^{n}\|X_i\|^2/n\right\}^{1/2}\\&=2C(E\|X\|^2)^{1/2}.\end{aligned}\tag{2.15}$$

由假设 $E\|X\|^2<\infty$，故对任给 $\varepsilon>0$，可选一零均值的简单 r.v. Y 使得 $E\|X-Y\|^2<\varepsilon^2/(4C^2)$. 而(2.15)式对 $X-Y$ 也同样成立，即有

$$\mathrm{CLT}(X-Y)\leqslant 2C(E\|X-Y\|^2)^{1/2}<\varepsilon.$$

得证 $X\in\mathrm{CLT}(B)$. 证毕.

定理 2.3　设 B 是 2 余型空间，X 是 B 值 r.v.，如果 X 是预 Gauss 的，即对任何 $f\in B'$，$Ef(X)=0$，$Ef(X)^2<\infty$，且存在一个零均值 Gauss r.v. $G=G(X)$ 具有与 X 相同的协方差结构，则 $X\in\mathrm{CLT}(B)$.

为证明定理 2.3，需要下述三个引理.

引理 2.2　设 X,Y 是 B 值零均值 Gauss r.v.，如果对所有 $f\in B'$，

$Ef(Y)^2 \leqslant Ef(X)^2$，则对任何凸集 C，

$$P\{Y \bar{\in} C\} < 2P\{X \bar{\in} C\}. \tag{2.16}$$

证 不妨设 X 与 Y 相互独立. 令 Z 是与 Y 独立的零均值 Gauss r.v.，具有协方差结构 $Ef(Z)^2 = Ef(X)^2 - Ef(Y)^2$. 则 $Y - Z$、$Y + Z$ 与 X 同分布. 因此，对任何凸集 C

$$\begin{aligned} P\{Y \in C\} &= P\left\{\frac{1}{2}((Y+Z)+(Y-Z)) \in C\right\} \\ &\leqslant P\{Y+Z \bar{\in} C\} + P\{Y-Z \bar{\in} C\} \\ &= 2P\{X \bar{\in} C\}. \end{aligned}$$

引理 2.3 令 X 是 B 值预 Gauss r.v.，Y 满足 $Ef(Y) = 0$，$Ef(Y)^2 \leqslant Ef(X)^2$，$f \in B'$. 则 Y 也是预 Gauss 的，且对 $p > 0$，$E\|G(Y)\|^p \leqslant 2E\|G(X)\|^p$，其中 $G(X)$，$G(Y)$ 分别为与 X,Y 相伴的 Gauss r.v.

证 因为 B 是可分的，故可设 $\mathscr{A}$ 为可数生成的 σ 域. 这样 $L_2(\Omega, \mathscr{A}, P)$ 是可分的 Hilbert 空间. 特别，存在一列标准正交基 $\{h_i\}$. 对 $N \geqslant 1$，定义

$$G_N = \sum_{i=1}^{N} g_i E(h_i Y),$$

其中 $\{g_i; i \geqslant 1\}$ 是一列相互独立的标准正态 r.v.

由定义，对 $f \in B'$

$$Ef(G_N)^2 \leqslant Ef(Y)^2 \leqslant Ef(X)^2 = Ef(G(X))^2. \tag{2.17}$$

由引理 2.2，对 $N \geqslant 1$ 与任何凸集 C 有 $P\{G_N \bar{\in} C\} < 2P\{G(X) \bar{\in} C\}$. 从而 $\{G_N; N \geqslant 1\}$ 是一致胎紧的，所以是弱相对紧的.

另外，对每一 $f \in B'$，$Ef(G_N)^2 \to Ef(Y)^2$. 所以 G_N 弱收敛于一个 Gauss r.v. $G(Y)$，且 $G(Y)$ 与 Y 有相同的协方差结构. 进而，从 (2.17) 可得 $Ef(G(Y))^2 \leqslant Ef(G(X))^2$. 再由引理 2.2 得对任何 $t > 0$，

$$P\{\|G(Y)\| > t\} < 2P\{\|G(X)\| > t\}. \tag{2.18}$$

这样对 $p > 0$ 有 $E\|G(Y)\|^p \leqslant 2E\|G(X)\|^p$.

引理 2.4 若 B 是 2 余型空间，X 为预 Gauss r.v.，则 $E\|X\|^2 \leqslant CE\|G(X)\|^2 < \infty$，其中 C 是仅依赖于 B 的 2 余型常数.

证 当 B 是 2 余型空间时，存在常数 $C > 0$，使对任意 n 个元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in B$，

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \leqslant CE\left\|\sum_{i=1}^{n} g_i x_i\right\|^2, \tag{2.19}$$

其中 $\{g_i; i \geqslant 1\}$ 是一列相互独立的标准正态 r.v.

对 $t > 0$，令 $Y = \varepsilon X I(\|X\| \leqslant t)$，其中 ε 为 Rademacher r.v. 且与 X 独

立. 由引理 2.3, Y 是预 Gauss 的, 且 $E\|G(Y)\|^2 \leqslant 2E\|G(X)\|^2$. 另一方面, 存在单调增加的有限 σ 域序列 $\mathscr{A}_N$. 若记 $Y^N = E(Y|\mathscr{A}_N)$, 则 Y^N a.s. 收敛于 Y, 且也按 $L_2(B)$ 范数收敛. 由于 $\mathscr{A}_N$ 是有限 σ 域, 故 Y^N 可写成有限和 $\sum_i x_i I(A_i)$, 其中 $A_i \in \mathscr{A}_N$ 互不相交. 由此易见

$$G(Y^N) = \sum_i g_i P(A_i)^{1/2} x_i, \quad E\|Y^N\|^2 = \sum_i P(A_i)\|x_i\|^2.$$

这样, 由(2.19)式有

$$E\|Y^N\|^2 \leqslant CE\|G(Y^N)\|^2. \tag{2.20}$$

因对每一 $f \in B'$, $Ef(Y^N)^2 \leqslant Ef(Y)^2$, 故从引理 2.3 得

$$E\|G(Y^N)\|^2 \leqslant 2E\|G(Y)\|^2.$$

由此即得

$$E\|Y^N\|^2 \leqslant 2CE\|G(Y)\|^2 \leqslant 4CE\|G(X)\|^2,$$

让 $N \to \infty$ 有 $E\|Y\|^2 \leqslant 4CE\|G(X)\|^2$. 由 $t > 0$ 的任意性得证 $E\|X\|^2 \leqslant 4CE\|G(X)\|^2 < \infty$. 证毕.

定理 2.3 的证明

由于 X 是预 Gauss 的, 设相伴的 Gauss r.v. 为 $G(X)$. 由引理 2.4 有

$$E\|X\|^2 \leqslant CE\|G(X)\|^2 < \infty. \tag{2.21}$$

所以对每一 $n \geqslant 1$, $S_n/\sqrt{n}$ 是预 Gauss 的, 且相伴的 Gauss r.v. 仍为 $G(X)$. 因此

$$\mathrm{CLT}(X) \leqslant C(E\|G(X)\|^2)^{1/2}. \tag{2.22}$$

另一方面, $E\|X\|^2 < \infty$ 表明存在单调增加的有限 σ 域序列 $\mathscr{A}_N$, 若记 $X^N = E(X|\mathscr{A}_N)$, 则 X^N a.s. 收敛于 X, 且也按 $L_2(B)$ 范数收敛. 对每一 $N \geqslant 1$, $f \in B'$, 有

$$Ef(X - X^N)^2 \leqslant 2Ef(X)^2 = 2Ef(G(X))^2.$$

由引理 2.3, $X - X^N$ 是预 Gauss 的, 且

$$Ef(G(X - X^N))^2 \leqslant 2Ef(G(X))^2.$$

由引理 2.2, Gauss 序列 $G(X - X^N)$ 是一致胎紧的. 既然对每一 $f \in B'$, $Ef(X - X^N)^2 \to 0\ (N \to \infty)$, 所以 $G(X - X^N)$ 弱收敛于 0. 由 Gauss r.v. 可积性, 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得 $E\|G(X - X^N)\|^2 < \varepsilon^2/C^2$. 应用(2.22)于 $X - X^N$ 上, 得

$$\mathrm{CLT}(X - X^N) \leqslant C(E\|G(X - X^N)\|^2)^{1/2} < \varepsilon.$$

得证 $X \in \mathrm{CLT}(B)$. 证毕.

§3 大数定律

在讨论大数定律前,我们先介绍B值随机级数的收敛性,它是第二章定理2.4和2.5在B上的推广.

定理 3.1(Lévy Itô Nisio) 设$\{X_i; i\geqslant 1\}$是B值对称r.v.列,记$S_n=\sum_{i=1}^n X_i$的分布为μ_n,则下述事实等价:

(i) S_n a.s. 收敛;

(ii) S_n依概率收敛;

(iii) μ_n弱收敛;

(iv) 在$(B,\mathscr{B})$上存在概率测度μ使得$\mu_n\circ f^{-1}$弱收敛于$\mu\circ f^{-1}$, $f\in B'$.

证 (ii)⇒(i) 若S_n依概率收敛于S,那么存在一整数子列$\{n_k\}$使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}P\{\|S_{n_k}-S\|>2^{-k}\}<\infty.$$

由Lévy不等式有

$$P\Big\{\max_{n_{k-1}<n\leqslant n_k}\|S_n-S_{n_{k-1}}\|>2^{-k+2}\Big\}\leqslant 2P\{\|S_{n_k}-S_{n_{k-1}}\|>2^{-k+2}\}$$

$$\leqslant 2(P\{\|S_{n_k}-S\|>2^{-k}\}+P\{\|S_{n_{k-1}}-S\|>2^{-k+1}\}).$$

应用Borel-Cantelli引理得S_n是a.s. Cauchy列,得证(i)成立.

(iii)⇒(ii) 先证$X_n\xrightarrow{P}0$. 首先,$X_n=S_n-S_{n-1}$是弱相对紧的.另一方面,对每一$f\in B'$, $f(S_n)$依分布收敛,故对任给$\delta>0$,存在$M>0$满足

$$\sup_n P\{|f(S_n)|>M\}<\delta^2. \tag{3.1}$$

Rademacher序列$\{\varepsilon_i\}$与$\{X_i\}$是相互独立的.以$P_X,E_X(P_\varepsilon,E_\varepsilon)$分别表示关于$\{X_i\}(\{\varepsilon_i\})$的条件概率与条件期望.由$\{X_i\}$的对称性有

$$\sup_n P_XP_\varepsilon\Big\{\Big|\sum_{i=1}^n\varepsilon_i f(X_i)\Big|>M\Big\}<\delta^2.$$

令$A=\Big\{\omega: P_\varepsilon\{\Big|\sum_{i=1}^n\varepsilon_i f(X_i(\omega))\Big|>M\}<\delta^2\Big\}$. 由Fubini定理得$P(A)=P_X(A)>1-\delta$. 对$\omega\in A$有

$$\Big(E_\varepsilon\Big|\sum_{i=1}^n\varepsilon_i f(X_i(\omega))\Big|^2\Big)^{1/2}<\sqrt{2}E_\varepsilon\Big|\sum_{i=1}^n\varepsilon_i f(X_i(\omega))\Big|. \tag{3.2}$$

若$\delta\leqslant 1/8$,则有

$$E_\varepsilon\Big|\sum_{i=1}^n\varepsilon_i f(X_i(\omega))\Big|\leqslant M+P_\varepsilon\Big\{\Big|\sum_{i=1}^n\varepsilon_i f(X_i(\omega))\Big|>M\Big\}^{1/2}$$

$$\cdot \ E_\varepsilon\left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i f(X_i(\omega))\right|^2\Big)^{1/2}$$

$$\leqslant M + E_\varepsilon\left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i f(X_i(\omega))\right| \leqslant 2M.$$

从(3.2)可得 $\sum_{i=1}^{n} f(X_i(\omega))^2 \leqslant 8M^2$. 由此即得

$$\sup_n P\Big\{\sum_{i=1}^{n} f(X_i)^2 > 8M^2\Big\} < \delta^2,$$

所以 $\sum_{i=1}^{n} f(X_i)^2 < \infty$ a.s.，由此必有 $f(X_n) \to 0$ a.s. 故得 X_n 弱收敛于 0.

假设 S_n 不依概率收敛，即 S_n 不是依概率 Cauchy 序列，那么存在 $\{n_k\}$ 使得 $T_k = S_{n_k} - S_{n_{k-1}}$ 不依概率趋于 0. 但已知 $\sum_k T_k = \sum_i X_i$ 弱收敛，由上面已证的结果知 $T_k \xrightarrow{P} 0$, 矛盾.

(iv)⟹(iii)　因 B 可分，故对每一闭子空间 F，存在一列 $f_m \in B'$，$\|f_m\| = 1$，使对任何 $x \in B$，$d(x,F) = \sup_{m\geqslant 1}|f_m(x)|$. 由假设知 $(f_1(S_n),\cdots,f_m(S_n))$ 在 $\mathbf{R}^m$ 上弱收敛于 $(\mu\circ f_1^{-1},\cdots,\mu\circ f_m^{-1})$. 从 Levy 不等式，对 $\varepsilon > 0$ 有

$$P\Big\{\max_{1\leqslant i\leqslant m}|f_i(S_n)| > \varepsilon\Big\} < 2\mu\Big\{x:\max_{1\leqslant i\leqslant m}|f_i(x)| > \varepsilon\Big\}.$$

由此即得对任何 $\varepsilon > 0, n \geqslant 1$ 有

$$P\{d(S_n,F) > \varepsilon\} = P\Big\{\sup_{m\geqslant 1}|f_m(S_n)| > \varepsilon\Big\}$$

$$\leqslant \sup_{m\geqslant 1} P\Big\{\max_{i\leqslant m}|f_i(S_n)| > \varepsilon\Big\} \leqslant 2\sup_m \mu\Big\{x:\max_{i\leqslant m}|f_i(x)| > \varepsilon\Big\}$$

$$< 2\mu\Big\{x:\sup_{m\geqslant 1}|f_m(x)| > \varepsilon\Big\} = 2\mu\{x:d(x,F) > \varepsilon\}, \tag{3.3}$$

其中 μ 是 $(B,\mathscr{B})$ 上的概率测度. 对任给 $\varepsilon > 0$，可选 F 使(3.3)式右边任意地小，从而 S_n 是弱相对紧的. 即得(iii)成立.

而由(i)⟹(ii)⟹(iii)⟹(iv)是显然的. 证毕.

现在我们来讨论 B 值 r.v. 的大数定律. 设 $\{X_i;i\geqslant 1\}$ 是 B 值 r.v. 列，记 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. 又设 $\{a_n\}$ 是单调递增趋向无穷的正数列. 我们先来看 S_n/a_n 的 a.s. 性质. 易见下述引理成立.

引理 3.1　设 $\{Y_n, Y_n';n \geqslant 1\}$ 是独立 r.v. 列，$Y_n - Y_n'$ a.s. 有界($Y_n - Y_n' \to 0$ a.s.)，且 Y_n 依概率有界($Y_n \xrightarrow{P} 0$)，那么 $\{Y_n\}$ a.s. 有界($Y_n \to 0$ a.s.). 精确地讲，若存在数 M 和 A，

$$\limsup_{n\to\infty}\|Y_n - Y_n'\| \leqslant M \text{ a.s.}, \quad \limsup_{n\to\infty} P\{\|Y_n'\| > A\} < 1,$$

则

$$\limsup_{n\to\infty}\|Y_n\| \leqslant 2M + A \quad \text{a.s.}$$

给定 B 值独立 r.v. 列 $\{X_i\}$，定义 $\{X_i'\}$ 是与 $\{X_i\}$ 独立同分布的 B 值 r.v. 列，则 $\tilde{X}_i = X_i - X_i'$，$i \geqslant 1$ 为独立对称 r.v. 引理 3.1 指出在对 S_n/a_n 的依概率性质作一适当假设下，只要研究 $\sum_{i=1}^n \tilde{X}_i/a_n$ 的 a.s. 性质，就可获得 S_n/a_n 的 a.s. 性质. 即不失一般性，我们总可假设 $\{X_i\}$ 是独立对称 r.v. 列.

引理 3.2 设 $\{X_i\}$ 是 B 值独立对称 r.v. 列，如果 S_n/a_n 依概率有界 ($S_n/a_n \xrightarrow{P} 0$)，则对任何 $p > 0$ 和有界正数列 $\{c_n\}$，$\left\{E\|\sum_{i=1}^n X_i I(\|X_i\| \leqslant c_n a_n)\|^p/a_n^p,\ n \geqslant 1\right\}$ 有界(收敛于 0).

证 仅对 $S_n/a_n \xrightarrow{P} 0$ 情形证明引理成立. 假设 $c_n < c$，$n \geqslant 1$. 由(1.19)式我们有

$$\begin{aligned} &E\|\sum_{i=1}^n X_i I(\|X_i\| \leqslant c_n a_n)\|^p \\ &\leqslant 2\cdot 3^p E \max_{1\leqslant i\leqslant n}\|X_i\|^p I(\|X_i\| \leqslant c_n a_n) + 2(3t_0(n))^p, \quad (3.4)\end{aligned}$$

其中 $t_0(n) = \inf\left\{t > 0, P\left\{\|\sum_{i=1}^n X_i I(\|X_i\| \leqslant c_n a_n)\| > t\right\} < (8\cdot 3^p)^{-1}\right\}$.

因 $S_n/a_n \xrightarrow{P} 0$，从压缩原理得 $a_n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i I(\|X_i\| \leqslant c_n a_n) \xrightarrow{P} 0$. 因此 $t_0(n)/n \to 0$. 另一方面

$$\begin{aligned} a_n^{-p} E \max_{1\leqslant i\leqslant n}\|X_i\|^p I(\|X_i\| \leqslant c_n a_n) &\leqslant a_n^{-p}\int_0^{ca_n} P\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|X_i\| > t\right\} dt^p \\ &\leqslant 2\int_0^c P\{\|S_n\| > ta_n\} dt^p. \quad (3.5)\end{aligned}$$

由控制收敛定理，(3.5) 右边趋于 0，引理证毕.

设 $1 < c \leqslant C < \infty$，$\{a_n\}$ 中存在子数列 $\{a_{k_n}\}$ 满足 $ca_{k_n} \leqslant a_{k_{n+1}} \leqslant Ca_{k_n}$. 记 $I(n) = \{k_{n-1}+1, \cdots, k_n\}$.

引理 3.3 设 $\{X_i; i \geqslant 1\}$ 是独立对称 B 值 r.v. 列，那么 S_n/a_n a.s. 有界 ($S_n/a_n \to 0$ a.s.) 当且仅当 $a_{k_n}^{-1}\|\sum_{i\in I(n)} X_i\|$ a.s. 有界 ($a_{k_n}^{-1}\|\sum_{i\in I(n)} X_i\| \to 0$ a.s.).

证明从略，请读者作为练习证明之.

从引理 3.1 和引理 3.3，我们有如下的直接推论.

推论 3.1 设$\{X_i;i\geqslant 1\}$是独立B值r.v.列，那么$S_n/a_n\to 0$ a.s. 当且仅当$S_n/a_n\xrightarrow{P}0$且$S_{k_n}/a_{k_n}\to 0$ a.s.，其中子数列$\{a_{k_n}\}$满足上述性质.

现在我们考察Kolmogorov，Marcinkiewicz Zygmund强大数律在Banach空间上的推广.我们将看到在适当的矩条件下，强、弱大数定律是等价的.对于实值r.v.X，当$EX=0$，$E|X|^p<\infty$，$0<p<2$时，有$S_n/n^{1/p}\to 0$ a.s. 在B空间中，$S_n/n^{1/p}\to 0$ a.s. 等价于$S_n/n^{1/p}\xrightarrow{P}0$.

定理 3.2 设$0<p<2$，$\{X_i;i\geqslant 1\}$是独立B值r.v.列，且与X同分布，那么$S_n/n^{1/p}\to 0$ a.s. 当且仅当$E\|X\|^p<\infty$，且$S_n/n^{1/p}\xrightarrow{P}0$.

证 显然条件必要.现证条件充分.由引理3.1，不妨设X是对称的.又由引理3.3及Borel-Cantelli引理，只需证明对任给$\varepsilon>0$有

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{\left\|\sum_{i\in I(n)}X_i\right\|>\varepsilon 2^{n/p}\right\}<\infty,\tag{3.6}$$

其中$I(n)=\{2^{n-1}+1,\cdots,2^n\}$.

对每一$n\geqslant 1$，令$u_i=u_i(n)=X_iI(\|X_i\|\leqslant 2^{n/p})$，$i\in I(n)$.因$E\|X\|^p<\infty$，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\{\exists\, i\in I(n);u_i\neq X_i\}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}2^nP\{\|X\|^p>2^n\}<\infty.$$

所以只需证明对任给$\varepsilon>0$成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{\left\|\sum_{i\in I(n)}u_i\right\|>\varepsilon 2^{n/p}\right\}<\infty.\tag{3.7}$$

另一方面，由引理3.2

$$\lim_{n\to\infty}2^{-n/p}E\left\|\sum_{i\in I(n)}u_i\right\|=0.$$

这样，(3.7)就等价于对任给$\varepsilon>0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{\left|\left\|\sum_{i\in I(n)}u_i\right\|-E\left\|\sum_{i\in I(n)}u_i\right\|\right|>\varepsilon 2^{n/p}\right\}<\infty.\tag{3.8}$$

为证(3.8)式，我们需要下述Yurinskii的结果.

引理 3.4 设$\{X_i;1\leqslant i\leqslant N\}$是$B$值独立可积r.v.，记$\mathscr{A}_i=\sigma(X_1,\cdots,X_i)$，$1\leqslant i\leqslant N$，$\mathscr{A}_0$为平凡$\sigma$域，$S_N=\sum_{i=1}^{N}X_i$，$d_i=E(\|S_N\|\,|\mathscr{A}_i)-E(\|S_N\|\,|\mathscr{A}_{i-1})$.则$|d_i|\leqslant\|X_i\|+E\|X_i\|$；进一步，若$X_i\in L_2(\Omega,\mathscr{A},P;B)$，则

$$E\left|\|S_N\|-E\|S_N\|\right|^2\leqslant 4\sum_{i=1}^{N}E\|X_i\|^2.\tag{3.9}$$

证 $\{d_i: 1\le i\le N\}$ 是鞅差序列且 $\sum_{i=1}^{N} d_i = \|S_N\| - E\|S_N\|$. 又由独立性可得

$d_i = E(\|S_N\| - \|S_N - X_i\| \mid \mathscr{A}_i) - E(\|S_N\| - \|S_N - X_i\| \mid \mathscr{A}_{i-1})$,

因此

$$|d_i| \le E(\|X_i\| \mid \mathscr{A}_i) + E(\|X_i\| \mid \mathscr{A}_{i-1}) \le \|X_i\| + E\|X_i\|,$$

这就得证(3.9)成立.

为证(3.8)式,应用引理 3.4 于 u_i 上,并由 $E\|X\|^p<\infty$,得

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|\|\sum_{i\in I(n)} u_i\| - E\|\sum_{i\in I(n)} u_i\|| > \varepsilon 2^{n/p}\} \le \frac{4}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i\in I(n)} E\|u_i\|^2/2^{2n/p}$$

$$\le \frac{4}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n(2/p-1)}}E\|X\|^2 I(\|X\|\le 2^{n/p}) < \infty. \tag{3.10}$$

定理证毕.

推论 3.2 令 $\{X_i; i\ge 1\}$ 是 B 值独立 r.v. 列,

(i) 设 $0<p<1$,则 $S_n/n^{1/p}\to 0$ a.s. 当且仅当 $E\|X\|^p<\infty$;

(ii) 设 $1<p<2$, B 是 p 型空间,则 $S_n/n^{1/p}\to 0$ a.s. 当且仅当 $EX=0$, $E\|X\|^p<\infty$.

证 (i) 由定理 3.2,只需证明从 $E\|X\|^p<\infty$ 可推出 $S_n/n^{1/p}\xrightarrow{P} 0$. 对每一 $\varepsilon>0$,存在一简单 r.v. Y 使得 $E\|X-Y\|^p<\varepsilon$. 令 $\{Y, Y_n; n\ge 1\}$ 是 i.i.d. B 值 r.v. 列,记 $T_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$,则

$$E\|S_n - T_n\|^p \le nE\|X-Y\|^p < n\varepsilon. \tag{3.11}$$

因简单 r.v. Y 是有限维的,故 $T_n/n^{1/p}\xrightarrow{P} 0$. 所以由(3.11)也有 $S_n/n^{1/p}\xrightarrow{P} 0$.

(ii) 只需证对 p 型空间 B, $E\|X\|^p<\infty$, $EX=0$ 推出 $S_n/n^{1/p}\xrightarrow{P} 0$. 类似(i),由 p 型空间的定义有

$$E\|S_n - T_n\|^p \le 2^p E\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(X_i - Y_i)\|^p$$

$$\le 2^p E_{X,Y}E_\varepsilon\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(X_i - Y_i)\|^p$$

$$< 2^p C^p nE\|X - Y\|^p < 2^p C^p n\varepsilon. \tag{3.12}$$

证毕.

例 3.1 考察 $B=C_0$ 空间. 对任给单调递减趋向 0 的正数列 $\{a_n\}$,存在一个 a.s. 有界对称的 B 值 r.v. X,使得 $S_n/na_n \not\xrightarrow{P} 0$.

证　令$\{\xi_k\}$为独立实 r.v. 列，

$$P\{\xi_k = 1\} = P\{\xi_k = -1\} = (1 - P\{\xi_k = 0\})/2 = (\log(k+1))^{-1}.$$

定义$\beta_k = \sqrt{a_n}$　$(2^{n-1} < k \leqslant 2^n)$，$X = \{\beta_k\xi_k; k \geqslant 1\}$. 则$X$ a.s. 有界且对称. 设$\{\xi_{k,i}; i \geqslant 1\}$是独立 r.v. 列，与$\{\xi_k\}$同分布. 对$n,k \geqslant 1$记

$$E_{n,k} = \bigcap_{i=1}^{n}\{\xi_{k,i} = 1\},\quad A_n = \bigcup_{k \leqslant 2^n} E_{n,k}.$$

显然$P(E_{n,k}) = (\log(k+1))^{-n}$. 故当$n \to \infty$时

$$P(A_n) = 1 - \prod_{k=1}^{2^n} (1 - P(E_{n,k})) = 1 - \prod_{k=1}^{2^n}(1 - (\log(k+1))^{-n}) \to 1.$$

用$\{e_k; k \geqslant 1\}$表示C_0的一列标准单位基，则

$$S_n/na_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{na_n}\Big(\sum_{i=1}^{n}\xi_{k,i}\Big)\beta_k e_k, \tag{3.13}$$

而在A_n上

$$\|S_n\|/na_n \geqslant \max_{k \leqslant 2^n} \frac{1}{na_n}\beta_k\Big|\sum_{i=1}^{n}\xi_{k,i}\Big| \geqslant \frac{1}{\sqrt{a_n}}.$$

由假设$a_n \to 0$，故对任给$\epsilon > 0$

$$\liminf_{n\to\infty} P\{\|S_n\|/na_n > \epsilon\} \geqslant \liminf_{n\to\infty} P(A_n) = 1.$$

这表明S_n/na_n不依概率收敛于 0.

最后，我们不加证明地给出一个关于独立不必同分布的B值 r.v. 列服从强大数律的结果.

定理 3.3　设$\{X_i; i \geqslant 1\}$是一独立B值 r.v. 列，若对某$1 < p < 2$，$\sum_{i=1}^{\infty} E\|X_i\|^p/i^p < \infty$，那么$S_n/n \to 0$ a.s. 当且仅当$S_n/n \xrightarrow{P} 0$.

详细证明可参见[16]

§4　重对数律

本章最后一节介绍B值 r.v. 的重对数律，其中包括经典的 Kolmogorov，Hartman-Wintner 和 Strassen 重对数律在 Banach 空间上的推广. 这些揭示了无穷维情形许多有趣的现象，加深了我们对实值情形有关结果的理解. 正如大数定律一样，B空间中在适当的矩条件下，重对数律的a.s. 形式可归结为相应的依概率形式来讨论. 重对数律是极限定理中极为精细的结果，许多证明相当复杂. 限于篇幅，在此仅作一简介. 某些定理也不给出证明，读者可参见[16].

首先介绍 Kolmogorov 关于有界 r.v. 的重对数律. 用 B'_1 记 B' 的单位球.

定理 4.1 设 $\{X_i;i\geq 1\}$ 是独立 B 值 r.v. 列, 对每一 $f\in B'$, $Ef(X_i)=0$, $Ef(X_i)^2<\infty$. 令 $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$, $s_n=\sup_{f\in B'_1}\left(\sum_{i=1}^n Ef(X_i)^2\right)^{1/2}$, $n\geq 1$. 假设 $s_n\to\infty$, 且对某趋于 0 的正数列 $\{\eta_i;i\geq 1\}$,

$$\|X_i\|\leq \eta_i s_i/(2\log\log s_i^2)^{1/2},\quad i\geq 1. \tag{4.1}$$

若 $S_n/(2s_n^2\log\log s_n^2)^{1/2}\xrightarrow{P}0$, 则

$$\limsup_{n\to\infty}\|S_n\|/(2s_n^2\log\log s_n^2)^{1/2}=1\quad \text{a.s.} \tag{4.2}$$

注 4.1 与实值情形一样可证 $\limsup_{n\to\infty}\|S_n\|/(2s_n^2\log\log s_n^2)^{1/2}\geq 1$ a.s.; 而证明 $\limsup_{n\to\infty}\|S_n\|/(2s_n^2\log\log s_n^2)^{1/2}<\infty$ a.s. 也较容易, 困难在于建立 $\limsup_{n\to\infty}\|S_n\|/(2s_n^2\log\log s_n^2)^{1/2}\leq 1$ a.s.

现在来考察 i.i.d. r.v. 列的重对数律. 令 $\{X,X_i;i\geq 1\}$ 是 i.i.d. B 值 r.v. 列, 记 $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$, $b_n=(2n\log\log n)^{1/2}$. 若

$$\Lambda(X)\stackrel{\text{def}}{=}\limsup_{n\to\infty}\|S_n\|/b_n<\infty\quad \text{a.s.} \tag{4.3}$$

(据 0-1 律, $\Lambda(X)$ 是非随机的), 则称 X **满足有界重对数律**, 记作 $X\in$ BLIL. 若 S_n/b_n 在 B 中 a.s. 相对紧, 则称 X **满足紧重对数律**, 记作 $X\in$ CLIL. 受 Strassen 重对数律的启发, 称 X **满足重对数律**, 若在 B 中存在紧凸对称集 K, 使得

$$\lim_{n\to\infty}d(S_n/b_n,K)=0 \text{ 且 } C(\{S_n/b_n\})=K \text{ a.s.}, \tag{4.4}$$

其中 $d(x,K)=\inf\{\|x-y\|;y\in K\}$, $C(\{S_n/b_n\})$ 表示 $\{S_n/b_n\}$ 的极限点集.

当 $B=\mathbf{R}$ 时, Hartman-Wintner-Strassen 结果指明了上述三种形式的重对数律是相互等价的, 且都等价于 $EX=0$, $EX^2<\infty$, 此时 $K=[-\sqrt{EX^2},\sqrt{EX^2}]$. 对于无穷维 Banach 空间, 这些不再成立.

设 X 是 B 值 r.v., 既然 B 是可分的, 不妨设 $\mathscr{A}$ 是可数生成的 σ 域. 这样 $L_2(\Omega,\mathscr{A},P)$ 是可分 Hilbert 空间. 假设对 $f\in B'$, $Ef(X)=0$, $Ef(X)^2<\infty$ (注意到, 若 $X\in$ BLIL, 则对 $f\in B'$, $f(S_n/b_n)$ a.s. 有界, 从而 $Ef(X)=0$, $Ef(X)^2<\infty$), 则 $\sigma(X)=\sup_{f\in B'_1}(Ef(X)^2)^{1/2}<\infty$. 事实上, 考虑算子 $A=A_X$: $B'\to L_2(\Omega,\mathscr{A},P)$, $Af=f(X)$, 那么 $\|A\|=\sigma(X)$, 且由闭图象定理, A 为有界线性算子. 以 A^* 记 A 的伴随算子. 对 $\xi\in L_2(\Omega,\mathscr{A},P)$, $A^*\xi=E\xi X\in B$. 在 $A^*(L_2)\subset B$ 上定义内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$: 若 $\xi,\zeta\in L_2$, $\langle A^*\xi,A^*\zeta\rangle_X=\langle\xi,\zeta\rangle_{L_2}$

$=\int_\Omega \xi\zeta dP$. 用 $H=H_X$ 表示可分 Hilbert 空间 $(A^*L_2,\langle\cdot,\cdot\rangle_X)$，称它为与 X 的协方差结构相伴的再生核 Hilbert 空间. 以 $K=K_X$ 记 H 的闭单位球，即 $K=\{x: x\in B, x=E\xi X, \|\xi\|_2\leqslant 1\}$，它是 B 上有界凸对称子集. 据 Hahn Banach 定理，$K=\{x: x\in B, f(x)\leqslant \|f(X)\|_2, f\in B'\}$. 进一步，对 $f\in B'$，

$$\|f(X)\|_2=\sup_{x\in K}f(x),\quad \sigma(X)=\sup_{x\in K}\|X\|.$$

命题 4.1 K 是紧的当且仅当 $\{f(X)^2; f\in B'_1\}$ 一致可积. 特别，若 $E\|X\|^2<\infty$，则 K 是紧的.

证　首先假设 $\{f(X)^2, f\in B'_1\}$ 一致可积. 如果 $\{f_n\}$ 是 B'_1 中一列泛函，对某子列 $\{f_{n_k}\}$ 和某 $f\in B'_1$，f_{n_k} 弱收敛于 f. 因此 $f_{n_k}(X)\to f(X)$ a.s. 由于 $\{f_{n_k}(X)^2\}$ 一致可积，那么 $f_{n_k}(X)$ 也依 L_2 范数收敛于 $f(X)$. 这表明 A 是紧算子，即 A^* 是紧算子. 所以 K 是紧子集. 得证条件充分.

现证条件必要. 设 K 是紧的，若 $\{f(X)^2, f\in B'_1\}$ 不一致可积，则存在 $\varepsilon>0$ 及一列递增趋向 ∞ 的正数列 $\{c_n\}$，使对每一 $n\geqslant 1$

$$\sup_{f\in B'_1}\int_{\{\|X\|\geqslant c_n\}}f(X)^2dP\geqslant\sup_{f\in B'_1}\int_{\{|f(X)|\geqslant c_n\}}f(X)^2dP>\varepsilon.$$

由此，对每一 $n\geqslant 1$，存在 $f_n\in B'_1$ 使得

$$\int_{\|X\|\geqslant c_n}f_n(X)^2dP>\varepsilon. \tag{4.5}$$

另一方面，存在 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{n'}\}$ 使得 $f_{n'}$ 弱收敛于某 f. 令 $x_n=EX(f_n-f)(X)$. 因 K 是紧集，存在 $\{x_{n'}\}$ 的子列 $\{x_{n''}\}$ 使得 $x_{n''}$ 收敛于某 x. 由此即得

$$E(f_{n''}(X)-f(X))^2\leqslant(f_{n''}-f)(x_{n''})\leqslant\|x_{n''}-x\|+(f_{n''}-f)(x)\to 0. \tag{4.6}$$

结合 (4.5)，与 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\|X\|\geqslant c_n}f(X)^2dP=0$ 矛盾. 得证 $\{f(X)^2; f\in B'_1\}$ 一致可积. 证毕.

命题 4.2　设 X 是 B 值 r.v.，如果 $\{S_n/b_n\}$ 在 B 中 a.s. 相对紧，那么

$$\lim_{n\to\infty}d(S_n/b_n,K)=0,\quad C(\{S_n/b_n\})=K, \tag{4.7}$$

其中 $K=K_X$ 是与 X 的协方差结构相伴的再生核 Hilbert 空间的单位球且 K 是紧的. 反之，若 (4.7) 对某 K 成立，那么 $X\in$ CLIL 且 $K=K_X$.

本命题的证明从略.

下面我们讨论 B 值 r.v. 满足有界或紧重对数律的条件.

假设 $X\in$ BLIL，那么对每个 $f\in B'$，$Ef(X)=0$，$Ef(X)^2<\infty$. 另外，

X_n/b_n a.s. 有界. 由 Borel-Cantelli 引理,对某 $M<\infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\{\|X\|>Mb_n\}<\infty,$$

这等价于 $E(\|X\|^2/\log\log\|X\|)<\infty$. 假设 $X\in$ CLIL,由命题 4.2,$K=K_X$ 是紧的. 又由命题 4.1,$\{f(X)^2; f\in B'_1\}$ 一致可积. 另一方面,S_n/b_n 不仅依概率有界且依概率收敛于 0. 因为 S_n/b_n 一致胎紧且唯一可能的极限点为 0,由此易得必要条件,实际上它也是充分的.

定理 4.2 设 X 是 B 值 r.v. 则 $X\in$ BLIL 当且仅当

(i) $E(\|X\|^2/\log\log\|X\|)<\infty$,

(ii) 对每一 $f\in B'$, $Ef(X)=0$, $Ef(X)^2<\infty$,

(iii) S_n/b_n 依概率有界.

$X\in$ CLIL 当且仅当

(i′) $E(\|X\|^2/\log\log\|X\|)<\infty$,

(ii′) $EX=0$, $\{f(X)^2, f\in B'_1\}$ 一致可积,

(iii′) $S_n/b_n \xrightarrow{P} 0$,

此时 $\Lambda(X)=\limsup\limits_{n\to\infty}\|S_n\|/b_n=\sigma(X)$ a.s.

$$\lim_{n\to\infty}d(S_n/b_n, K)=0,\quad C(\{S_n/b_n\})=K_X\quad \text{a.s.}$$

上述定理完全刻画了 B 值 r.v. 服从重对数律的条件. 它不仅依赖于 r.v. 的分布,且涉及部分和的弱极限性质. 如同讨论中心极限定理和大数定律时一样,r.v. 的矩条件并不足以保证这些弱极限性质. 但在特殊的空间上,我们有

推论 4.1 设 B 是 2 型空间,X 是 B 值 r.v.,则 $X\in$ BLIL(相应地,$X\in$ CLIL) 当且仅当 $E(\|X\|^2/\log\log\|X\|)<\infty$,且 $Ef(X)=0$, $Ef(X)^2<\infty$(相应地,$\{f(X)^2, f\in B'_1\}$ 一致可积).

证 由定理 4.2 只需证明 $EX=0$, $E(\|X\|^2/\log\log\|X\|)<\infty$ 时,$S_n/b_n \xrightarrow{P} 0$.

不妨设 X 是对称的. 对每一 $n\geqslant 1$,

$$E\|S_n\|\leqslant E\left\|\sum_{i=1}^{n}X_iI(\|X_i\|\leqslant b_n)\right\|+nE(\|X\|I(\|X\|>b_n)).\tag{4.8}$$

因 $E(\|X\|^2/\log\log\|X\|)<\infty$,由分部积分得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{b_n}E\|X\|I(\|X\|>b_n)=0.\tag{4.9}$$

又由 2 型空间的定义得

$$b_n^{-1}E\left\|\sum_{i=1}^n X_iI(\|X_i\|\leqslant b_n)\right\|\leqslant\left(\frac{C}{2\log\log n}E\|X\|^2I(\|X\|\leqslant b_n)\right)^{1/2}.$$

故对任何 $t>0$

$$\frac{E\|X\|^2I(\|X\|\leqslant b_n)}{2\log\log n}\leqslant\frac{t^2}{2\log\log n}+\frac{1}{2\log\log n}E\|X\|^2I(t<\|X\|\leqslant b_n)$$

$$\leqslant\frac{t^2}{2\log\log n}+E\frac{\|X\|^2}{2\log\log\|X\|}I(\|X\|>t).$$

先令 $n\to\infty$,再让 $t\to\infty$,得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}E\left\|\sum_{i=1}^n X_iI(\|X_i\|\leqslant b_n)\right\|=0. \tag{4.10}$$

结合(4.8)式得 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n^{-1}\|S_n\|=0$,所以 $S_n/b_n\xrightarrow{P}0$.

习　　题

1. 设 $\{\varepsilon_i\}$ 为 Rademacher 列

(i) 令 $\{\alpha_i\}$ 为实数列,试证对任何 $t>0$,

$$P\left\{\left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_i\varepsilon_i\right|>t\right\}\leqslant 2\exp\left(-t^2\Big/\left(2\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2\right)\right);$$

(ii) 试证存在常数 $C\geqslant 1$ 使得当 $\{\alpha_i\}$ 和 t 满足 $t\geqslant C\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2\right)^{1/2}$, $t\max\limits_{1\leqslant i}|\alpha_i|\leqslant C^{-1}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2$ 时,

$$P\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_i\alpha_i>t\right\}\geqslant\exp\left\{-Ct^2\Big/\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2\right\};$$

(iii) 试证对 $0<p<\infty$,存在 A_p, B_p 使得对任何有限实数 $\{\alpha_i;1\leqslant i\leqslant N\}$ 有

$$A_p\left(\sum_{i=1}^N\alpha_i^2\right)^{1/2}\leqslant\left\|\sum_{i=1}^N\alpha_i\varepsilon_i\right\|_p\leqslant B_p\left(\sum_{i=1}^N\alpha_i^2\right)^{1/2}.$$

2. 令 $\{X_i;1\leqslant i\leqslant N\}$ 是 B 值对称 r.v.,$\{\xi_i,\zeta_i;1\leqslant i\leqslant N\}$ 是实 r.v. 若有对称函数 $\varphi_i:B\to\mathbf{R}$,使 $\xi_i=\varphi_i(X_i)$,对称函数 $\Psi_i:B\to\mathbf{R}$,使 $\zeta_i=\psi_i(X_i)$. 若 $|\xi_i|\leqslant|\zeta_i|$ a.s. 那么对任何凸函数 $F:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$(在适当可积性假定下)

$$EF\left(\left\|\sum_{i=1}^N\xi_iX_i\right\|\right)\leqslant EF\left(\left\|\sum_{i=1}^N\zeta_iX_i\right\|\right).$$

且对任何 $t>0$

$$P\left\{\left\|\sum_{i=1}^N\xi_iX_i\right\|>t\right\}\leqslant 2P\left\{\left\|\sum_{i=1}^N\zeta_iX_i\right\|>t\right\}.$$

3. 设$\{X_i\}$是独立对称B值r.v.，$\|X_i\|_\infty \leqslant a < \infty$ a.s. 且$S = \sum_{i=1}^{\infty} X_i < \infty$ a.s. 试证对所有$\lambda > 0$，$E\exp(\lambda\|S\|) < \infty$.

4. 设X是B值r.v.满足$\mathrm{CLT}(X) < \infty$. 以$L_{2,1}$记所有满足$\|\xi\|_{2,1} = \int_0^\infty P(|\xi| > t)^{1/2}\mathrm{d}t < \infty$的实r.v.$\xi$全体. 若非零实r.v.$\xi \in L_{2,1}$且与$X$独立，那么

$$\frac{1}{2}E|\xi|\mathrm{CLT}(X) \leqslant \mathrm{CLT}(\xi X) \leqslant 2\|\xi\|_{2,1}\mathrm{CLT}(X).$$

特别，$\xi X \in \mathrm{CLT}(B)$（且$EX = 0$）当且仅当$X \in \mathrm{CLT}(B)$.

5. 设X是B值r.v.，$EX = 0$，$\xi \in L_{2,1}$且$E\xi = 0$，$E\xi^2 = 1$. 若ξ与X独立，则下面两事实等价：

(i) $E\|X\|^2 < \infty$，$X \in \mathrm{CLT}(B)$，

(ii) 对a.s.ω，$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i X_i(\omega)$依分布收敛.

6. 试证　(i) 设B是可分Banach空间，若对任何满足$EX = 0$，$E\|X\|^2 < \infty$的B值r.v.X都满足中心极限定理，那么B必是2型空间；

(ii) 设Banach空间B可分，若任何预Gauss B值r.v.X都满足中心极限定理，则B是2余型空间.

7. 设$1 \leqslant p < 2$，B是可分Banach空间，若任何满足$EX = 0$，$E\|X\|^p < \infty$的B值r.v.X满足$S_n/n^{1/p} \to 0$ a.s.，那么B是p型空间.

8. 试证明定理3.3.

9. 试证明定理4.1和4.2.

附录一　拓扑学、函数论有关知识

在本节中,我们总用 S 记度量空间.

S 的一个开集类 $\mathscr{G}$ 叫作 S 的**拓扑基**,若 S 的任一开子集 G 可表成 $\mathscr{G}$ 的某些元的并.

定理 1　下述三命题等价:

(i) S 可分(即 S 有一可列稠密子集);

(ii) S 有可列拓扑基;

(iii) S 的子集的任一开覆盖有一可列子覆盖.

证　(i)⇒(ii). 设 D 是 S 的可列稠密子集,用 V 记中心在 D 中,且有有理半径的全体开球,V 是一个可列集. 我们来证 V 是 S 的拓扑基. 事实上,对 S 的任一开子集 G,令 $G_1=\bigcup{}' S(d,r)$,这里 $\bigcup{}'$ 是对 V 中那些被含于 G 中的球 $S(d,r)$ 来求和. 显然有 $G_1\subset G$. 另一方面,对任一 $x\in G$,因 G 是开集,故有某 $\varepsilon>0$ 使 $S(x,\varepsilon)\subset G$. 因 D 在 S 中稠密,故有 $d\in D$ 使 $\rho(x,d)<\varepsilon/2$. 取有理数 r 使 $\rho(x,d)<r<\varepsilon/2$. 则 $x\in S(d,r)\subset S(x,\varepsilon)\subset G$,得 $G\subset G_1$. 因此 $G=G_1$.

(ii)⇒(iii). 设 S 有可列拓扑基 $\{V_n\}$,S 的子集 A 有一开覆盖 $\{G_\alpha\}$. 对于满足如下条件的 V_k:有 G_α 使 $V_k\subset G_\alpha$,可对应地确定一个 G_{α_k} 使 $V_k\subset G_{\alpha_k}$. 那么此时有 $A\subset\bigcup\limits_k G_{\alpha_k}$,即 A 有可列子覆盖.

(iii)⇒(i). 对每一 n,$\{S(x,1/n):x\in S\}$ 是 S 的开覆盖. 由(iii),它有一可列子覆盖 $\{S(x_{n,k},1/n):n,k=1,2,\cdots\}$. 易见可列集 $\{x_{n,k}:n,k=1,2,\cdots\}$ 在 S 中稠密. 证毕.

定义 1　距离空间 S 的子集 A 说是**紧的**,若 A 的每一开覆盖必有一有限子覆盖. 子集 A 说是**全有界的**,若对任给 $\varepsilon>0$,A 有一有限 ε 网. 子集 A 说是**完备的**,若 A 中任一基本序列在 A 中有一极限点.

定理 2　下述四个命题等价:

(i) $\overline{A}$ 是紧的;

(ii) A 的每一可列开覆盖有一有限子覆盖;

(iii) A 中每一无穷序列有一极限点;

(iv) A 是全有界的,且 $\overline{A}$ 完备.

证　首先由(iii)知 A 中每一子列有一极限点，且必在 $\overline{A}$ 中. 又 A 全有界当且仅当 $\bar{A}$ 全有界. 所以不失一般性，总可设 $A=\bar{A}$ 是闭的.

(i)⇒(ii). 显然.

(ii)⇒(iii). 对任一列 $\{x_n\}\subset A$，记 $F_n=\overline{\{x_k;k\geqslant n\}}$. 若 $\bigcap_n F_n=\varnothing$，则开集 $\{F_n^c\}$ 覆盖 A. 由(ii)存在 n，使得 $A\subset F_1^c\cup\cdots\cup F_n^c$. 这就得 $A\cap F_n=\varnothing$，矛盾. 所以有 $x\in\bigcap_n F_n$，它就是 $\{x_n\}$ 的极限点.

(iii)⇒(iv). 若集 A 不是全有界的，则有 $\varepsilon>0$ 及 $\{x_n\}$，使 $\rho(x_n,x_m)\geqslant\varepsilon$ $(m\neq n)$；此时 $\{x_n\}$ 无极限点. 所以由(iii)得 A 必是全有界的，显然又是完备的.

(iv)⇒(i). 设 $\{G_\alpha\}$ 是 A 的一个开覆盖. 若没有有限子覆盖，由(iv)知 A 是全有界的，即对任一 n，A 可被有限个半径为 $1/2^n$ 的开球 $B_{n1},\cdots,B_{nk_n}$ 所覆盖. 那么此时必有某 B_{ni}，没有 $\{G_\alpha\}$ 的有限子族能覆盖 AB_{ni}. 记这一 B_{ni} 为 C_n. 又因 $\{B_{ni}C_{n-1}A\}$ 覆盖 AC_{n-1}，所以没有 $\{G_\alpha\}$ 的有限子族能覆盖 AC_nC_{n-1}，特别 $C_nC_{n-1}\neq\varnothing$. 设 $x_n\in AC_n$，因 $C_nC_{n-1}\neq\varnothing$ 且 C_n 的半径为 $1/2^n$，所以

$$\rho(x_n,x_{n-1})<6/2^n,$$

$$\rho(x_n,x_{n+k})<6/2^n.$$

这样 $\{x_n\}$ 是基本序列，它的极限 $x\in A$. 有某 α 使 $x\in G_\alpha$. 此时有 $\varepsilon>0$ 使 $S(x,\varepsilon)\subset G_\alpha$. 取充分大的 n，使 $2^{-n}<\varepsilon/3$ 且 $\rho(x,x_n)<\varepsilon/3$，这就得证 $C_n\subset G_\alpha$，矛盾. 证毕.

定理 3　若 S 是 σ 紧的，则 S 可分.

这由定理 2 和 1 即得.

Uryson 定理　每一可分度量空间 S 与 $\mathbf{R}^\infty$ 的某子集同胚.

证　设 $\{y_n\}$ 是 S 中一个稠密点集，对任一 $x\in S$，作 S 到 $\mathbf{R}^\infty$ 的映射

$$h: x\rightarrow h(x)=(\rho(x,y_1),\ \rho(x,y_2),\cdots).$$

若在 S 中有 $x_n\rightarrow x(\rho)$，那么对每一 k 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_k)=\rho(x,y_k)$. 由于 $\mathbf{R}^\infty$ 的拓扑是由坐标的点收敛规定的，由此得 $h(x_n)\rightarrow h(x)$，即 h 是连续映射.

反之，若 $x_n\nrightarrow x(\rho)$，即有某 $\varepsilon>0$ 及子列 $\{x_{n'}\}$ 使得 $\rho(x_{n'},x)>\varepsilon$. 对这一 ε，在稠密点列 $\{y_n\}$ 中有某 y_k 使得 $\rho(x,y_k)<\varepsilon/2$. 由此对任一 n'，$\rho(x_{n'},y_k)>\varepsilon/2$. 所以 $\rho(x_n,y_k)\nrightarrow\rho(x,y_k)$，故 $h(x_n)\nrightarrow h(x)$.

易知 h 是一一的，由上已知又是双方连续的，所以 h 是 S 到 $\mathbf{R}^\infty$ 中的同胚映射.

空间 $\mathbf{C}=\mathbf{C}[0,1]$

记 $C=C[0,1]$ 为 $[0,1]$ 上实值连续函数全体. 它对一致距离

$$\rho(x,y)=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-y(t)|$$

构成一个度量空间.

定理 4　度量空间 (C,ρ) 是可分且完备的.

证　令 B 为所有在点 $i/k\ (i=0,1,\cdots,k)$ 上取有理值的逐段线性函数 $(k=1,2,\cdots)$ 全体. 即

$$f(x)=f\left(\frac{i-1}{k}\right)+\left(\frac{1}{k}\Big/\left(x-\frac{i-1}{k}\right)\right)\left(f\left(\frac{i}{k}\right)-f\left(\frac{i-1}{k}\right)\right),$$

$$\frac{i-1}{k}\leqslant x\leqslant\frac{i}{k},$$

易证 B 是 C 的可列稠密子集, 所以 C 是可分的.

设 $\{x_n\}$ 是 C 的一个基本序列, 即对任给 $\varepsilon>0$, 有 N, 当 $m,n\geqslant N$ 时

$$\rho(x_m,x_n)=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon.$$

此时对每一固定的 t, $\{x_n(t)\}$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的基本序列, 所以有极限 $x(t)$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=x(t)$. 因为对任一 $t\in[0,1]$, 当 $m,n\geqslant N$ 时

$$|x_m(t)-x_n(t)|\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon,$$

让 $m\to\infty$, 就得当 $n\geqslant N$ 时对一切 $t\in[0,1]$ 有

$$|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon,$$

即 $[0,1]$ 上连续函数列 $\{x_n(t)\}$ 一致收敛于 $x(t)$, 因此 $x(t)\in C[0,1]$. 得证 C 是完备的.

C 中的元 $x=x(t)$ 的连续模定义为

$$w_x(\delta)=\sup_{|s-t|<\delta}|x(t)-x(s)|\quad(0<\delta<1).$$

Arzela-Ascoli 定理　C 的子集 A 的闭包 $\overline{A}$ 是紧的充要条件是:

(i) $\sup\limits_{x\in A}|x(0)|<\infty$,

(ii) $\lim\limits_{\delta\to 0}\sup\limits_{x\in A}w_x(\delta)=0$.

证　条件必要　若 A 是紧的, 由定理 2 知 A 有有限 ε 网, 即对任给 $\varepsilon>0$, 有 $x_1,\cdots,x_n\in C$, 使对任一 $x\in A$ 有某 x_k 使得 $\rho(x,x_k)<\varepsilon$. 所以 $|x(0)-x_k(0)|<\varepsilon$, 由此可得

$$\sup_{x\in A}|X(0)|<\varepsilon+\max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k(0)|<\infty,$$

即 (i) 成立. 对任给 $\delta>0$, 由于

$$|w_x(\delta)-w_y(\delta)|\leqslant\rho(x,y),$$

所以 $w_x(\delta)$ 关于 x 是连续的. 又当 $\delta > \delta'$ 时, $w_x(\delta) \geqslant w_x(\delta')$ 且 $\lim\limits_{\delta \to 0} w_x(\delta) = 0$, 所以开集 $G_n = \{x : w_x(1/n) < \varepsilon\}$, $G_n \subset G_{n+1}$, $\{G_n\}$ 能覆盖 C. 若 A 是紧的, 则必有某 n 使 $A \subset G_n$, 即在 A 上一致地有

$$\sup_{x \in A} w_x(1/n) < \varepsilon,$$

得证(ii)成立.

条件充分　若(i)、(ii)成立, 取 k 充分大使 $\sup\limits_{x \in A} w_x(1/k) < \varepsilon$. 因为

$$|x(t)| \leqslant |x(0)| + \sum_{i=1}^{k} |x(it/k) - x((i-1)t/k)|,$$

所以 $a = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} \sup\limits_{x \in A} |x(t)| < \infty$. 现在来证 A 是全有界的, 即有有限 ε 网. 取正整数 v 使 $a/v < \varepsilon$, 令

$$H = \{ua/v : u = 0, \pm 1, \cdots, \pm v\}.$$

易见 H 是有限集. 设 C 的子集 B 由这样一些元组成: 在 i/k 上取值于 H 的折线 $(i = 0, 1, \cdots, k)$. 此时 B 中共有 $(2v+1)^{k+1}$ 个元. 我们来证 B 是 A 的 2ε 网. 事实上, 对任一 $x \in A$, $|x(i/k)| \leqslant a$, 故存在 $y \in B$ 使

$$|x(i/k) - y(i/k)| < a/v < \varepsilon \quad (i = 0, 1, \cdots, k).$$

由于 $w_x(1/k) < \varepsilon$, 且 y 在每一区间 $[(i-1)/k, i/k]$ 上为直线段, 所以由上式即得 $\rho(x, y) < 2\varepsilon$, 这就得证 B 是 A 的 2ε 网. 最后, 由 C 的完备性知 $\bar{A}$ 是完备的. 故由定理 2 得 $\bar{A}$ 是紧的.

附录二　概率不等式

概率不等式是概率论和数理统计的理论研究中的重要工具.有力的概率不等式,例如,对于概率或矩的精确估计,常常是创建一个重要定理的关键.对于概率极限理论和统计大样本理论,几乎所有重要结果的论证或者是借助于建立有力的概率不等式,或者是通过对已有的概率不等式的巧妙应用.为了便于研究或教学中查阅、引用,我们将概率统计中特别是概率极限理论中常用的一些基本不等式不加证明地分类罗列如下.

一、随机事件的概率不等式

1. 若 $A \subset \bigcup_i A_i$,则 $P(A) \leqslant P(\bigcup_i A_i) \leqslant \sum_i P(A_i)$.

2. $|P(AB) - P(A)P(B)| \leqslant 1/4$.

3. $|P(A) - P(B)| \leqslant P(A\Delta B)$,其中 $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

4. $P\{(\bigcup_n A_n)\Delta(\bigcup_n B_n)\} \leqslant P\{\bigcup_n (A_n \Delta B_n)\} \leqslant \sum_n P\{A_n \Delta B_n\}$.

5. $P\{(A_1 - A_2)\Delta(B_1 - B_2)\} \leqslant P\{A_1 \Delta B_1\} + P\{A_2 \Delta B_2\}$.

6. (Boole) $P(AB) \geqslant 1 - P\{A^c\} - P\{B^c\}$.

7. 记 $\limsup_n A_n = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$, $\liminf_n A_n = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} A_n$,则

$$P\{\liminf_n A_n\} \leqslant \liminf_n P\{A_n\} \leqslant \limsup_n P\{A_n\}$$

$$\leqslant P\{\limsup_n A_n\} \leqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} P\{A_n\}.$$

8. 若 $P(A) \geqslant 1 - \varepsilon$, $P(B) \geqslant 1 - \varepsilon$,则 $P(AB) \geqslant 1 - 2\varepsilon$.

9. $P(A) + P(B) - 1 \leqslant P(AB) \leqslant \sqrt{P(A)P(B)}$;一般地

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) - (n-1) \leqslant P\{\bigcap_{k=1}^{n} A_k\} \leqslant \min_{1\leqslant k\leqslant n} \{P(A_k)\}^{1/2^{n-1}}.$$

10. 设 $\{A_n\}$ 相互独立,则

$$1 - P\{\bigcup_{k=1}^{n} A_k\} \leqslant \exp\Big\{-\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\Big\},$$

$$1 - P\Big\{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big\} \leqslant \lim_n \exp\Big\{-\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\Big\}.$$

11. 设 A,B 独立,$AB \subset D$, $A^cB^c \subset D^c$,则 $P(AD) \geqslant P(A)P(D)$.

12. (Feller-Chung)　设 $A_0 = \varnothing$,$\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 是两事件列.若(1)对一切

$n \geqslant 1$，B_n 与 $A_nA_{n-1}^c\cdots A_0^c$ 独立或(ii)对一切 $n \geqslant 1$，B_n 与 $\{A_n, A_nA_{n+1}^c, A_nA_{n+1}^cA_{n+2}^c, \cdots\}$ 独立，则

$$\inf_{n\geqslant 1} P\{B_n\} P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} \leqslant P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_nB_n\right\}.$$

13. (Bonferroni) 以 P_m 和 $P_{[m]}$ 分别记 $A_1, \cdots, A_N$ 等 N 个事件中至少发生 m 个及恰有 m 个发生的概率，记 $S_m = \sum\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant N} P\{A_{i_1}\cdots A_{i_m}\}$. 则

$$S_m - (m+1)S_{m+1} \leqslant P_{[m]} \leqslant S_m, \quad S_m - mS_{m+1} \leqslant P_m \leqslant S_m.$$

14. (Chung-Erdös)

$$P\left\{\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right\} \geqslant \left(\sum_{i=0}^{n} P(A_i)\right)^2 \Big/ \left(\sum_{i=0}^{n} P(A_i) + \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} P(A_iA_j)\right).$$

二、与分布函数和特征函数有关的不等式

1. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(b-a)e^{-(a^2\vee b^2)/2} \leqslant \Phi(b) - \Phi(a) \leqslant b - a$

$$(-\infty < a < b < \infty).$$

2. 对 $x > 0$，

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)\varphi(x) < \frac{x}{1+x^2}\varphi(x) < 1 - \Phi(x) < \frac{1}{x}\varphi(x),$$

$$\frac{2}{x + \sqrt{x^2+4}}\varphi(x) \leqslant 1 - \Phi(x) \leqslant \frac{2}{x + \sqrt{x^2+2}}\varphi(x).$$

精确地，

$$1 - \Phi(x) = \varphi(x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1\cdot 3}{x^5} - \cdots + (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{x^{2k+1}} + \cdots\right)$$

3. 对任一实数 x，$\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+4} - x)\varphi(x) \leqslant 1 - \Phi(x)$；

对 $x > -1$，　$1 - \Phi(x) \leqslant \frac{4}{3x + \sqrt{x^2+8}}\varphi(x)$.

4. 二项分布与正态分布之比：

$$\left|\frac{b(k;n,p)}{(npq)^{-1/2}\varphi(x)} - 1\right| < \frac{A}{n} + \frac{B|x|^3}{\sqrt{n}} + \frac{C|x|}{\sqrt{n}}, \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

5. 泊松分布与正态分布之比：

$$\left|\frac{p(k,\lambda)}{\lambda^{-1/2}\varphi(x)} - 1\right| \leqslant \frac{A}{\lambda} + \frac{B|x|^3}{\sqrt{\lambda}} + \frac{C|x|}{\sqrt{\lambda}}, \quad x = \frac{k-\lambda}{\sqrt{\lambda}} = o(\lambda^{1/6}).$$

6. 设(X,Y)服从二元正态分布$N\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & r\\ r & 1\end{pmatrix}\right)$，则对任何实数$a,b$当$0 \leqslant r < 1$时有

$$(1-\Phi(a))\left(1-\Phi\left(\frac{b-ra}{\sqrt{1-r^2}}\right)\right) \leqslant P\{X > a, Y > b\}$$

$$\leqslant (1-\Phi(a))\left\{\left(1-\Phi\left(\frac{b-ra}{\sqrt{1-r^2}}\right)\right)+r\frac{\varphi(b)}{\varphi(a)}\left(1-\Phi\left(\frac{a-rb}{\sqrt{1-r^2}}\right)\right)\right\}.$$

若$-1 < r \leqslant 0$，则"$\leqslant$"改为"$\geqslant$".

7. 设$F_1(x),\cdots,F_m(x)$为d.f.，$\lambda_i > 0$，$\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i = 1$. 记$H(x) = \sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i F_i(x)$，则存在常数$K > 0$使得

$$F_i(x) \leqslant KH(x),\quad 1-F_i(x) \leqslant K(1-H(x)).$$

8. 设$F(x,y)$为二元分布函数，$F_1(x)$和$F_2(y)$是它的两个边际分布. 则

$$|F(b,b)-F(a,a)| \leqslant |F_1(b)-F_1(a)| + |F_2(b)-F_2(a)|.$$

9. 对任意c.f. $f(t)$，$1-|f(2t)|^2 \leqslant 4(1-|f(t)|^2)$.

10. 若对$|t| \geqslant b > 0$，$|f(t)| \leqslant c$，则当$|t| < b$时，$|f(t)| \leqslant 1-\frac{1-c^2}{8b^2}t^2$.

11. 对非退化的c.f. $f(t)$，存在正数δ和ε，使当$|t| \leqslant \delta$时，$|f(t)| \leqslant 1-\varepsilon t^2$.

12. 设r.v. X有界，$|X| \leqslant C$，则当$|t| \leqslant 1/4C$时，$e^{-\sigma^2 t^2} \leqslant |f(t)| \leqslant e^{-\sigma^2 t^2/3}$，其中$\sigma^2 = \operatorname{Var}X$.

13.（增量不等式）　对任意实数t,h，c.f. $f(t)$满足：

$$|f(t)-f(t+h)|^2 \leqslant 2\{1-\operatorname{Re}f(h)\}.$$

14.（截尾不等式）　对任意$u > 0$，d.f. $F(x)$与对应的c.f. $f(t)$，满足

$$\int_{|x|<1/u} x^2 \mathrm{d}F(x) \leqslant \frac{3}{u^2}\{1-\operatorname{Re}f(u)\},$$

$$\int_{|x|\geqslant 1/u} \mathrm{d}F(x) \leqslant \frac{7}{u}\int_0^u (1-\operatorname{Re}f(v))\mathrm{d}v.$$

15.（积分不等式）　对任意$u > 0$，存在$0 < m(u) < M(u) < \infty$，使得

$$m(u)\int_0^u \{1-\operatorname{Re}f(v)\}\mathrm{d}v \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}F(x) \leqslant M(u)\int_0^u \{1-\operatorname{Re}f(v)\}\mathrm{d}v.$$

对充分接近于0的u，又有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}F(x) \leqslant -M(u)\int_0^u \log\operatorname{Re}f(v)\mathrm{d}v.$$

16. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}F(x) \leqslant \int_0^{\infty} e^{-t}|f(t)-1|\mathrm{d}t.$

17.（Esseen和Berry-Esseen）　设$X_1,\cdots,X_n$是独立r.v.，$EX_j = 0$，

$E|X_j|^3<\infty$，$j=1,\cdots,n$. 记 $\sigma_j^2=EX_j^2$，$B_n=\sum_{j=1}^n\sigma_j^2$，$L_n=B_n^{-3/2}\sum_{j=1}^nE|X_j|^3$，则存在常数 $A_1>0$

$$\sup_x\left|P\{B_n^{-1/2}\sum_{j=1}^nX_j<x\}-\Phi(x)\right|\leqslant A_1L_n.$$

特别地，当 $X_1,\cdots,X_n$ 为 i.i.d. 时，记 $\sigma^2=EX^2$，$\rho=E|X_1|^3/\sigma^3$，则存在常数 $A_2>0$

$$\sup_x\left|P\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=1}^nX_j<x\right\}-\Phi(x)\right|\leqslant A_2\rho n^{-1/2}.$$

其中 $A_1\leqslant 0.7915$，$A_2\leqslant 0.7655$.

18. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是 i.i.d. r.v.，则存在 $C_1,C_2>0$，成立

$$\left\|P\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=1}^nX_j<x\right\}-\Phi(x)\right\|_p\leqslant C_1(\delta(n)+n^{-1/2}),$$

$$\left\|P\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{j=1}^nX_j<x\right\}-\Phi(x)\right\|_p+n^{-1/2}\geqslant C_2\delta(n),$$

其中 $\delta(n)=EX_1^2I(|X_1|\geqslant\sqrt{n})+n^{-1/2}E|X_1|^3I(|X_1|\leqslant\sqrt{n})+n^{-1}EX_1^4I(|X_1|\leqslant\sqrt{n})$，

$$\|f(x)\|_p=\begin{cases}\sup_x|f(x)|, & \text{当 } p=\infty,\\ \left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}, & \text{当 } 1\leqslant p<\infty.\end{cases}$$

三、随机变量的概率不等式

1. $P(X+Y\geqslant x)\leqslant P(X\geqslant x/2)+P(Y\geqslant x/2)$，

$P(|X+Y|\geqslant x)\leqslant P(|X|\geqslant x/2)+P(|Y|\geqslant x/2)$.

2. 设 X 与 Y 独立，则

(1) $P\{X+Y\leqslant x\}\geqslant P(X\leqslant x/2)P(Y\leqslant x/2)$，

(2) $P\{|X+Y|\leqslant x\}\geqslant P(|X|\leqslant x/2)P(|Y|\leqslant x/2)$.

(3) 对充分大的 $x>0$，$P(|X|>x)\leqslant 2P(|X|>x,|Y|<x/2)\leqslant 2P(|X+Y|>x/2)$.

3. $P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k|\geqslant x\right\}\leqslant\sum_{k=1}^nP\{|X_k|\geqslant x\}$；$P\left\{\min_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k|\leqslant x\right\}\leqslant\sum_{k=1}^nP\{|X_k|\leqslant x\}$.

4. 设 $\{X_j\}$ 和 $\{Y_j\}$ 满足 (i) 对一切 $n\geqslant1$，X_n 与 $(Y_1,\cdots,Y_n)$ 独立或 (ii) 对一切 n，X_n 与 $(Y_n,Y_{n+1},\cdots)$ 独立，则对任意常数 ϵ_n，δ_n，ϵ 和 δ

$$P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(X_n+Y_n>\varepsilon_n)\right\}\geqslant P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(Y_n>\varepsilon_n+\delta_n)\right\}\inf_{n\geqslant 1}P\{X_n\geqslant -\delta_n\},$$

$$P\left\{\limsup_n(X_n+Y_n)\geqslant\varepsilon\right\}\geqslant P\left\{\limsup_n Y_n>\varepsilon+\delta\right\}\liminf_n P\{X_n\geqslant -\delta\}.$$

5.(1)(弱对称不等式)　对任意 x 和 a,

$$\frac{1}{2}P\{X-mX\geqslant x\}\leqslant P\{X^s\geqslant x\},$$

$$\frac{1}{2}P\{|X-mX|\geqslant x\}\leqslant P\{|X^s|\geqslant x\}\leqslant 2P\{|X-a|\geqslant x/2\},$$

其中 $X^s=X-X'$, X' 是与 X 独立同分布的 r.v.

(2)(强对称不等式)　设 r.v. 列 $\{T_n\}$ 与 $\{T'_n\}$ 独立同分布, $T^s_n=T_n-T'_n$, 则对任意 $x>0$ 和数列 $\{c_n\}$ 有

$$\frac{1}{2}P\left\{\sup_{n\geqslant 1}|T_n-mT_n|\geqslant x\right\}\leqslant P\left\{\sup_{n\geqslant 1}|T^s_n|\geqslant x\right\}$$

$$\leqslant 2P\left\{\sup_{n\geqslant 1}|T_n-c_n|\geqslant x/2\right\},$$

$$\frac{1}{2}P\left\{\max_{1\leqslant n\leqslant N}|T_n-mT_n|\geqslant x\right\}\leqslant P\left\{\max_{1\leqslant n\leqslant N}|T^s_n|\geqslant x\right\}.$$

6. 设 $\{X_j\}$ 是独立对称的 r.v. 列,

$$\sup_{x>0}x^pP\left\{\left|\sum_{j=1}^{n}X_j\right|>x\right\}\leqslant C(p)\sum_{j=1}^{n}\sup_{x>0}x^pP(|X_j|>x).$$

7.(Lévy)　设 $\{X_j\}$ 是独立 r.v. 列, $S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$, 则对任意 $x>0$

(1) $P\left\{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}[S_i-m(S_i-S_n)]\geqslant x\right\}\leqslant 2P(S_n\geqslant x)$;

(2) $P\left\{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i-m(S_i-S_n)|\geqslant x\right\}\leqslant 2P(|S_n|\geqslant x)$;

(3) 若 $EX_j=0$, $EX_j^2<\infty$. 记 $B_n=\sum_{j=1}^{n}EX_j^2$, 则

$$P\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}S_i\geqslant x\right\}\leqslant 2P\{S_n\geqslant x-\sqrt{2B_n}\}.$$

8. 设 $\{X_j\}$ 是独立对称 r.v. 列, $b_n>0$ 使 $S_n/b_n\xrightarrow{P}0$, 则

$$P\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|X_j|>xb_n\right\}\leqslant P\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i|>xb_n/2\right\}.$$

9. $X_1,\cdots,X_n$ 为 r.v. 记 $S_0=0$, $S_i=\sum_{j=1}^{i}X_j$, $M_n=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}|S_i|$, $M'_n=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\min(|S_i|,|S_n-S_i|)$, $M''_n=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant n}\min(|S_j-S_i|,|S_k-S_j|)$, 则

(1) $P\{M_n\geqslant x\}\leqslant P\{M'_n\geqslant x/4\}+P\left\{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|X_j|\geqslant x/4\right\}$;

(2) 若对给定的 $\gamma \geqslant 0$，$\alpha > 1$ 和任意的 $x > 0$，$P\{|S_j - S_i| \geqslant x\} \leqslant \left(\sum_{i<l\leqslant j} u_l\right)^{\alpha} / x^{\gamma}$，则存在常数 $K_{\gamma,\alpha}$ 成立

$$P\{M_n \geqslant x\} \leqslant K_{\gamma,\alpha}\left(\sum_{l=1}^{n} u_l\right)^{\alpha} / x^{\gamma};$$

(3) 若对给定的 $\gamma \geqslant 0$，$\alpha > 1/2$ 和任意的 $x > 0$，

$$P\{|S_j - S_i| \geqslant x,\ |S_k - S_j| \geqslant x\} \leqslant \left(\sum_{i<l\leqslant k} u_l\right)^{2\alpha} / x^{2\gamma},$$

则存在常数 $K'_{\gamma,\alpha}$ 和 $K''_{\gamma,\alpha}$ 成立

$$P\{M'_n \geqslant x\} \leqslant K'_{\gamma,\alpha}\left(\sum_{l=1}^{n} u_l\right)^{2\alpha} / x^{2\gamma},\quad P\{M''_n \geqslant x\} \leqslant K''_{\gamma,\alpha}\left(\sum_{l=1}^{n} u_l\right)^{2\alpha} / x^{2\gamma};$$

(4) 若对给定的 $\gamma \geqslant 0$，$\alpha > 1/2$ 和任意的 $x > 0$，

$$P\{|S_j - S_i| \geqslant x,\ |S_k - S_j| \geqslant x\} \leqslant \left(\sum_{i<l\leqslant j} u_l\right)^{\alpha}\left(\sum_{j<l\leqslant k} u_l\right)^{\alpha} / x^{2\gamma},$$

则存在常数 $K'''_{\gamma,\alpha}$ 成立

$$P\{M''_n \geqslant x\} \leqslant K'''_{\gamma,\alpha}\left(\sum_{l=1}^{n} u_l\right)^{2\alpha} \min_{1\leqslant i\leqslant n}\left(1 - u_i \Big/ \left(\sum_{l=1}^{n} u_l\right)\right)^{\alpha} / x^{2\gamma}.$$

10. (Ottaviani) 设 $\{X_j\}$ 是独立 r.v. 列，对任给 $x > 0$

$$P\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} |S_i| > 2x\right\} \leqslant P\{|S_n| > x\} / \min_{1\leqslant i\leqslant n} P\{|S_n - S_i| \leqslant x\}.$$

特别地若存在 $c > 0$，对每一 $k = 0,1,\cdots,n-1$，$P\{|X_{k+1} + \cdots + X_n| \leqslant c\} \geqslant 1/2$，则

$$P\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} |S_i| > 2c\right\} \leqslant 2P\{|S_n| > c\}.$$

11. (Levy-Skorohod) 设 $\{X_j\}$ 是独立 r.v. 列，$0 < c < 1$，则对任意 $x > 0$

$$P\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} S_i \geqslant x\right\} \leqslant P\{S_n \geqslant cx\} / \min_{1\leqslant i\leqslant n} P\{S_n - S_i \leqslant (1-c)x\}.$$

12. (Chernoff) 设 $\{X_j\}$ 是 i.i.d. r.v. 列，$EX_1 = 0$，在 $t = 0$ 的一个邻域内，$R(t) \overset{\text{def}}{=} Ee^{tX_1} < \infty$. 记 $\rho(x) = \inf_t e^{-tx}R(t)$，则对任意 $x > 0$

$$P\{S_n \geqslant nx\} \leqslant \rho^n(x),\quad \lim_{n\to\infty}(P(S_n \geqslant nx))^{1/n} = \rho(x).$$

13. (Hoffmann Jørgensen) 设 $\{X_j, j \in Z_+^d\}$ 是 i.i.d. 对称 r.v. 场. 则对每一 $j = 1,2,\cdots$，

$$P\{|S_n| \geqslant 3^j t\} \leqslant C_j |n| P\{|X_1| \geqslant t\} + D_j(P\{|S_n| \geqslant t\})^{2^j},$$

其中 C_j, D_j 是只与 j 有关的常数，特别地 $C_1 = 1, D_1 = 4$.

14. (Mogulskii) 设 $\{X_j\}$ 是独立 r.v. 列. 对 $2 \leqslant m \leqslant n$，$x_1 > 0$，$x_2 > 0$ 成立

$$P\left\{\min_{m\leqslant k\leqslant n} S_k \leqslant x_1\right\} < P\{|S_n| \leqslant x_1 + x_2\} / \min_{m\leqslant k\leqslant n} P\{|S_n - S_k| \leqslant x_2\}.$$

15. 设$\{X_n\}$是i.i.d. r.v.列，$EX_1 = 0$，$EX_1^2 = \sigma^2$. 又设 $|\theta| < \delta < 1$. 则对任意 $\epsilon > 0$，存在 $0 < c_1, c_2 < \infty$ 使得

$$P\{|S_n / \sqrt{2n\log\log n} - \theta| \leqslant \epsilon\}$$

$$\geqslant \frac{c_1}{(\log n)^{\delta}} - nP(|X_1| > \sqrt{n}) - \frac{c_2}{\sqrt{n}} E|X_1 I(|X_1| \leqslant \sqrt{n})|^3.$$

四、矩不等式

1. 对任意正数 r 和 c，$E|XI(|X| \leqslant c)|^r \leqslant E|X|^r$.

2. (c_r 不等式) $E|X+Y|^r \leqslant c_r(E|X|^r + E|Y|^r)$，其中 $c_r = 1$，若 $0 < r \leqslant 1$；$c_r = 2^{r-1}$，若 $r \geqslant 1$.

3. (Cauchy Schwarz) $|EXY| \leqslant (EX^2)^{1/2}(EY^2)^{1/2}$；又对任一 σ 域 $\mathscr{G}$，$E(|XY| | \mathscr{G}) \leqslant \{E(X^2|\mathscr{G})E(Y^2|\mathscr{G})\}^{1/2}$ a.s.

4. (Hölder) 对正数 $p, q > 1$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 有

$$|EXY| \leqslant (E|X|^p)^{1/p}(E|Y|^q)^{1/q}; \quad |E(XY|\mathscr{G})| \leqslant (E(|X|^p|\mathscr{G}))^{1/p}(E(|Y|^q|\mathscr{G}))^{1/q} \text{ a.s.}$$

5. (Minkowski) 对 $r \geqslant 1$

$$\left(E\left|\sum_{j=1}^n X_j\right|^r\right)^{1/r} \leqslant \sum_{j=1}^n (E|X_j|^r)^{1/r};$$

$$\left(E\left(\left|\sum_{j=1}^n X_j\right|^r \middle| \mathscr{G}\right)\right)^{1/r} \leqslant \sum_{j=1}^n (E(|X_j|^r|\mathscr{G}))^{1/r} \quad \text{a.s.}$$

6. (Minkowski 伴随不等式)

$$E\left|\sum_{j=1}^n X_j\right|^r \geqslant \sum_{j=1}^n E|X_j|^r, \qquad r \geqslant 1,$$

$$E\left|\sum_{j=1}^n X_j\right|^r < \sum_{j=1}^n E|X_j|^r, \qquad r < 1,$$

$$\left(E\left|\sum_{j=1}^n X_j\right|^r\right)^{1/r} > \sum_{j=1}^n (E|X_j|^r)^{1/r}, \qquad r < 1.$$

7. 对任意 $0 < r \leqslant s$

$$(E|X|^r)^{1/r} \leqslant (E|X|^s)^{1/s}; \quad \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n |X_j|^r\right)^{1/r} \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n |X_j|^s\right)^{1/s}.$$

8. (Jensen) 若 φ 为 $\mathbf{R}^1$ 上的下凸函数，$X, \varphi(X)$ 都可积，则

$$\varphi(EX) \leqslant E\varphi(X); \quad \varphi(E(X|\mathscr{G})) \leqslant E(\varphi(X)|\mathscr{G}).$$

9. 设 $E|X| < \infty$，记 $Y = aI(X < a) + XI(a \leqslant X \leqslant b) + bI(X > b)$

$(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$. 则对 $1 \leqslant p < \infty$, $E|X - EX|^p \geqslant E|Y - EY|^p$.

10. 设 X 与 X' i.i.d., $E|X|^r < \infty$, $1 \leqslant r \leqslant 2$, 则

$$\frac{1}{2}E|X - X'|^r \leqslant E|X|^r \leqslant E|X - X'|^r;$$

又对任意 a 及 $r > 0$ 有

$$\frac{1}{2}E|X - mX|^r \leqslant E|X - X'|^r \leqslant 2c_r E|X - a|^r.$$

11. (Lyapounov) 记 $\beta_k = E|X|^k$, $0 \leqslant l < m \leqslant n$, 则 $\beta_m^{n-l} \leqslant \beta_l^{n-m}\beta_n^{m-l}$.

12. 设 X 与 Y 独立, $EX = 0$, $E|X|^p < \infty$, $E|Y|^p < \infty$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 则

$$E|Y|^p \leqslant E|X + Y|^p.$$

13. 设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 同为非增(或同为非减)的函数,则

$$Eu(X)Ev(X) \leqslant E(u(X)v(X)).$$

14. 若 $X, Y \geqslant 0$, 则对 $p \geqslant 0$, $E(X+Y)^p \leqslant 2^p(EX^p + EY^p)$;

对 $p > 1$, $E(X+Y)^p \leqslant 2^{p-1}(EX^p + EY^p)$;

对 $0 \leqslant p \leqslant 1$, $E(X+Y)^p \leqslant EX^p + EY^p$.

15. 设 $EX^2 < \infty$, 则 $\mathrm{Var}X^+ \leqslant \mathrm{Var}X$, $\mathrm{Var}X^- \leqslant \mathrm{Var}X$.

16. 设 X 服从 $N(0,1)$, $1 \leqslant p < 2$, 则对任意 $t > 0$, $\varepsilon > 0$ 有

$$\exp(t^{\frac{2}{2-p}}\beta_p) \leqslant E\exp(t|X|^p) \leqslant \exp\left\{t\delta_p + t^{\frac{2}{2-p}}\beta_p + t^{\frac{3}{2}}\frac{9}{(2-p)^2}\right\}$$

$$\wedge \exp\{(1+\varepsilon)t\delta_p + t^{\frac{2}{2-p}}(\beta_p + c(\varepsilon, p))\},$$

其中 $\delta_p = E|X|^p$, $\beta_p = p^{p/(2-p)} \cdot \frac{2-p}{2}$, $c(\varepsilon,p) = \left(\frac{18}{2-p}\right)^{\frac{8}{2-p}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{3p-2}{2-p}}$.

五、随机变量的概率与矩间的不等式

1. (Tchebychev Markov 型) 设 $x > 0$

(1) (Tchebychev) $P\{|X - EX| \geqslant x\} \leqslant \mathrm{Var}X/x^2$;

(2) $P\{X - EX \geqslant x\} \leqslant \left(1 + \frac{x^2}{\mathrm{Var}X}\right)^{-1}$;

(3) (Markov) 对任意 $r > 0$, $P(|X| \geqslant x) \leqslant E|X|^r/x^r$;

(4) 设 g 是正值偶函数,在 $[0,\infty)$ 上不减,则

$$\frac{Eg(X) - g(x)}{\text{a.s.}\sup g(X)} \leqslant P\{|X| \geqslant x\} \leqslant Eg(X)/g(x)^{*)};$$

(5) 设 $|X| \leqslant 1$, 则 $P\{|X| \geqslant x\} \geqslant EX^2 - x^2$;

(6) 设 $X \geqslant 0$, 则对任意 $0 < \alpha < 1$, $P\{X > \alpha EX\} \geqslant (1-\alpha)^2(EX)^2/EX^2$;

---

*) $\text{a.s.}\sup|X| = \inf\{c: 0 \leqslant c \leqslant \infty, P(|X| > c) = 0\}$.

(7) 若 X 的可能值为 1,2…,且 $P\{X=k\}$ 关于 k 递减,则

$$P(X=k)\leqslant\frac{2}{k^2}EX.$$

2. 若 $X\geqslant 0$,则 $\sum_{n=1}^{\infty}P(X\geqslant n)\leqslant EX\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}P(X\geqslant n)$.

3. (Kolmogorov)　设 $\{X_j\}$ 是独立 r.v. 列,$EX_j=0$,$x>0$,记 $S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$.

(1) $P\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i|>x\right\}\leqslant \operatorname{Var}S_n/x^2$;若 $|X_j|\leqslant c$,还有

$$P\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i|>x\right\}\geqslant 1-\frac{(x-c)^2}{\operatorname{Var}S_n};$$

(2) 设有 $r>1$,$E|X_j|^r<\infty$,记 $A=\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i|\geqslant x\right\}$,则

$$x^rP\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i|\geqslant x\right\}\leqslant E|S_n|^rI(A)\leqslant E|S_n|^r;$$

(3) $P\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}S_i\geqslant x\right\}\leqslant(\operatorname{Var}S_n)/(x^2+\operatorname{Var}S_n)$;

(4) $P\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i|\leqslant x\right\}\leqslant\dfrac{x^2}{x^2+\operatorname{Var}S_n}$.

4. (Rényi-Hájek) 设 $\{X_j\}$ 是独立 r.v. 列,$EX_j=0$,数 $0<c_n\leqslant\cdots\leqslant c_1$,$x>0$,$m<n$.

(1) $P\left\{\max_{m\leqslant k\leqslant n}c_k|S_k|\geqslant x\right\}\leqslant\dfrac{1}{x^2}\left(c_m^2\sum_{k=1}^{m}EX_k^2+\sum_{k=m+1}^{n}c_k^2EX_k^2\right)$;

(2) 设 $g(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上非降下凸,$g(+0)=0$ 且 $g(xy)\leqslant g(x)g(y)$,则

$$P\left\{\max_{m\leqslant k\leqslant n}c_kS_k\geqslant x\right\}\leqslant\frac{1}{g(x)}\Big\{g(c_n)E^+g(S_n)$$
$$+\sum_{k=m}^{n-1}(g(c_k)-g(c_{k+1}))E^+g(S_k)\Big\},$$

其中 $E^+g(X)=\int_0^{\infty}g(x)\mathrm{d}F(x)$,$F(x)$ 是 X 的 d.f.

(3) (Bickel)　进一步若 $X_j(j=1,\cdots,n)$ 是对称的,$g(x)$ 是非负下凸函数,记 $G_n=\sum_{k=1}^{n}(c_k-c_{k+1})g(S_k)+c_ng(S_n)$. 则

$$P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}c_kg(S_k)\geqslant x\right\}\leqslant 2P\{G_n\geqslant x\}.$$

(4) (Heyde)　写 $X_k=Y_k+Z_k$,其中 $EY_k=0$,$EY_k^2<\infty$. 则对任意 $x>0$ 和 $0<a<1$ 有

$$P\{\max_{m\leqslant k\leqslant n} c_k|S_k| \geqslant x\} \leqslant \frac{1}{(1-a)^2x^2}\{c_m^2\sum_{k=1}^{m}EY_k^2 + \sum_{k=m+1}^{n} c_k^2EY_k^2\}$$

$$+\sum_{k=m+1}^{n} P\{Z_k \neq 0\} + P\{c_m|\sum_{k=1}^{m}Z_k| \geqslant ax\}.$$

5. 设$\{X_j\}$是独立 r. v. 列，$EX_j=0$且存在$p\geqslant 2$，$E|X_j|^p<\infty$. 则对任意$x>0$和常数a_j，$j=1,\cdots,n$，

$$P\{|\sum_{j=1}^{n}a_jX_j|\geqslant x\}\leqslant 2\left(1+\frac{2}{p}\right)^p\sum_{j=1}^{n}E|a_jX_j|^p/x^p$$

$$+2\exp\{-2e^{-p}x^2/[(p+2)\sum_{j=1}^{n}E(a_jX_j)^2]\}.$$

6. 设$\{X_j\}$是独立 r. v. 列，记$M_n=\max_{1\leqslant j\leqslant n}|X_j-mX_j|$，则对任意$x>0$

$$P\{|S_n-mS_n|\geqslant x/4\}\geqslant P(M_n>x)/8.$$

7. (Renyi Hájek-Chow) 设$\{S_n,\mathscr{F}_n\}$为下鞅，ξ_n是$\mathscr{F}_{n-1}$可测的且$0<\xi_1(\omega)\leqslant\xi_2(\omega)\leqslant\cdots\leqslant\xi_n(\omega)$ a. s.，则对任意$x>0$

$$P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}S_k/\xi_k\geqslant x\}\leqslant\frac{1}{x}\{E(S_1^+/\xi_1)+\sum_{k=2}^{n}E((S_k^+-S_{k-1}^+)/\xi_k)\}.$$

8. (上穿不等式) 设$\{S_n,\mathscr{F}_n\}$为下鞅，记$\nu_{a,b}^{(n)}$是样本$\{S_j,j=1,2,\cdots,n\}$上穿区间$[a,b]$的次数，则

$$E\nu_{a,b}^{(n)}\leqslant\frac{1}{b-a}\{E(S_n-a)^+-E(S_1-a)^+\}\leqslant\frac{1}{b-a}\{ES_n^++|a|\}.$$

9. (下穿不等式) 设$\{S_n,\mathscr{F}_n\}$为上鞅，记$\mu_{a,b}^{(n)}$是样本$\{S_j,j=1,2,\cdots,n\}$下穿区间$[a,b]$的次数，则

$$E\mu_{a,b}^{(n)}\leqslant\frac{1}{b-a}\{E(S_1\wedge b)-E(S_n\wedge b)\}.$$

10. (Burkholder) 设$\{S_n,\mathscr{F}_n\}$为鞅或非负下鞅. 则有常数C使对任意$x>0$成立

$$P\{\sum_{j=1}^{n}(S_j-S_{j-1})^2\geqslant x\}\leqslant CE|S_n|/\sqrt{x}.$$

六、部分和及其极大值的矩估计

在本节中，设$\{X_j\}$是 r. v. 列，记$S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$.

1. (1) 对$r>1$，$E|S_n|^r\leqslant n^{r-1}\sum_{j=1}^{n}E|X_j|^r$；

(2) 对$0<r\leqslant 1$，$E|S_n|^r\leqslant\sum_{j=1}^{n}E|X_j|^r$；

(3) 设$\{X_j\}$是独立对称 r.v. 列(更弱地,X_j 关于 S_{j-1} 的条件分布对称),则对 $1<r\leqslant 2$ 有 $E|S_n|^r\leqslant\sum_{j=1}^n E|X_j|^r$.

2. 设$\{X_n\}$是 i.i.d. r.v. 列,$P(X_1\neq 0)>0$,$EX_1=0$,则

(1) 存在 $C>0$ 使得 $E|S_n|\geqslant C\sqrt{n}$;

(2) $\lim_{n\to\infty}E|S_n|/\sqrt{n}=2\lim_{n\to\infty}ES_n^+/\sqrt{n}=\sqrt{\frac{2}{\pi}EX_1^2}$,其中 $0\leqslant EX_1^2\leqslant\infty$.

3. 设 $1\leqslant r\leqslant 2$.

(1) 若$\{X_j\}$是独立 r.v. 列,$EX_j=0$,则

$$E|S_n|^r\leqslant[1-D(r)]^{-1}\sum_{j=1}^n E|X_j|^r,$$

其中 $D(r)=\frac{13.52}{\pi(2.6)^r}\Gamma(r)\sin\frac{r\pi}{2}$;

(2) 若 $E(X_{n+1}|S_n)=0$ a.s.,则 $E|S_n|^r\leqslant 2^{2-r}\sum_{j=1}^n E|X_j|^r$;

(3) 若 $E(X_j|R_{mj})=0$ a.s. 其中 $R_{mj}=\sum_{i=1}^{m+1}X_i-X_j$,$1\leqslant j\leqslant m+1\leqslant n$,



$$E|S_n|^r\leqslant\left(2-\frac{1}{n}\right)\sum_{j=1}^n E|X_j|^r.$$

4. (1) 设$\{X_j\}$是鞅差序列,$r\geqslant 2$,则

$$E|S_n|^r\leqslant C_r n^{\frac{r}{2}-1}\sum_{j=1}^n E|X_j|^r,$$

其中 $C_r=\{8(r-1)\max(1,2^{r-3})\}^r$;

(2) 设$\{X_j\}$是独立 r.v. 列,$EX_j=0$(或对任意的正整数 $i_1,\cdots,i_p,k_1,\cdots,k_p$,满足 $\min(k_1,\cdots,k_p)=1$,成立 $EX_{i_1}^{k_1}\cdots X_{i_p}^{k_p}=0$),则对正整数 m,

$$E|S_n|^{2m}\leqslant D_{2m}n^{m-1}\sum_{j=1}^n E|X_j|^{2m},$$

其中 $D_{2m}=\sum_{p=1}^m p^{2m-1}/(p-1)!$;

(3) 设$\{X_j\}$是独立 r.v. 列,$EX_j=0$,$r\geqslant 2$,则

$$E|S_n|^r\leqslant B_r n^{\frac{r}{2}-1}\sum_{j=1}^n E|X_j|^r,$$

其中 $B_r=\frac{1}{2}r(r-1)(1\vee 2^{r-3})\{1+2r^{-1}D_{2m}^{(r-2)/2m}\}$,整数 m 满足 $2m\leqslant r<2m+2$.

5.（1）设$\{X_j\}$是i.i.d.r.v.列，存在$r \geq 1$，$E|X_1|^r < \infty$. 则$E\max\limits_{1\leq k\leq n}|S_k|^r \leq 8E|S_n|^r$；

（2）（Doob）设$\{S_n\}$是非负下鞅，则

$$E\{\sup_{n\geq 1} S_n\} \leq \frac{e}{e-1}\left\{1 + \sup_n E(S_n \log^+ S_n)\right\},$$

$$\left\{E\left|\sup_{n\geq 1} S_n\right|^p\right\}^{1/p} \leq q\sup_{n\geq 1}(E|S_n|^p)^{1/p}，其中\ p>1,\ q>1\ 且\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

6. 设$\{X_j\}$是i.i.d.r.v.列，则$E\{\sup\limits_{n\geq 1}|S_n/n|^r\} < \infty$ $(r \geq 1)$等价于$E\{\sup\limits_{n\geq 1}|X_n/n|^r\} < \infty (r \geq 1)$也等价于$E(|X_1|\log^+|X_1|) < \infty (r=1)$或$E|X_1|^r < \infty (r>1)$.

7. 设$\{X_j\}$是i.i.d.r.v.列，$EX_1=0$，则$E\{\sup\limits_{n\geq 3}|S_n/\sqrt{n\log\log n}|^r\} < \infty$ $(r \geq 2)$等价于$E\{\sup\limits_n|X_n/\sqrt{\log^+\log n}|^r\} < \infty (r \geq 2)$也等价于$E(X_1^2\log^+|X_1|/\log^+\log|X_1|) < \infty (r=2)$或$E|X_1|^r < \infty (r>2)$.

8. 设$\{X_j\}$是i.i.d.r.v.列，$EX_1=0$，常数a_j，$j=1,\cdots,n$，满足$\sum\limits_{j=1}^n a_j^2=1$.

（1）$E\left(\sum\limits_{j=1}^n a_jX_j\right)^2 = EX_1^2$；

（2）
$$E\left|\sum_{j=1}^n a_jX_j\right|^{2+r} < \left\{1+\frac{2}{\pi}\Gamma(3+r)\sin\frac{r\pi}{2}\left(\frac{2^{1-r}}{\Gamma(3+r)} + \frac{2}{r} + \frac{3}{16(2-r)}\right)\right\}E|X_1|^{2+r} \qquad (0<r<2);$$

（3）$E\left(\sum\limits_{j=1}^n a_jX_j\right)^{2p} < \left(\frac{3}{2}\right)^{p-2}(2p-1)!!EX_1^{2p}$（整数$p \geq 2$）；

（4）
$$E\left|\sum_{j=1}^n a_jX_j\right|^{2p+r} < \left\{1+\frac{2}{\pi}\Gamma(2p+r+1)\sin\frac{r\pi}{2}\right.$$
$$\cdot\left(\frac{2^{1-r}}{\Gamma(2p+r+1)} + \frac{2}{r(2p)!} + \frac{1}{(2-r)(2p-2)!!}\left(\frac{3}{2}\right)^p\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2}{r(2p)!!}\left(\frac{3}{2}\right)^{p-2}\right)\right\}E|X_1|^{2p+r}$$

（整数$p \geq 2$，$0<r<2$）.

9. 设$\{X_j\}$是独立r.v.列，$|X_j| < 1$ a.s.，存在$a>0$使$P(|S_n| \geq a) \leq \frac{1}{8e}$，则存在$c>0$使对任意正整数$m$，$E|S_n|^m \leq c8^m m!(a+1)^m$.

10.（Khintchine）　设$\{X_j\}$是i.i.d.r.v.列，$P(X_1=1)=P(X_1=-1)=1/2$，$\{b_j\}$是实数列，$r>0$，那么存在$0<C_{1r} \leq C_{2r} < \infty$使得

$$C_{1r}\left(\sum_{j=1}^{n}b_j^2\right)^{r/2}\leqslant E\left|\sum_{j=1}^{n}b_jX_j\right|^r\leqslant C_{2r}\left(\sum_{j=1}^{n}b_j^2\right)^{r/2}.$$

11.（1）若$\{X_j\}$是正交 r.v. 列，则

$$E\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_{a+j}-S_a|\right)^2\leqslant(\log(2n)/\log 2)^2\sum_{j=a+1}^{a+n}EX_j^2;$$

（2）设$g(n)$是正的非降函数，满足$2g(n)\leqslant g(2n)$，$\lim\limits_{n\to\infty}g(n)/g(n+1)=1$. 若存在$\nu>2$，对一切$a\geqslant 0$，$E|S_{a+n}-S_a|^\nu\leqslant g^{\nu/2}(n)$. 则存在常数$K_\nu$使得

$$E\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_{a+j}-S_a|^\nu\right\}\leqslant K_\nu g^{\nu/2}(n);$$

（3）设$g(a,k)$是$X_{a+1},\cdots,X_{a+k}$的联合分布的泛函$(a\geqslant 0,k\geqslant 1)$，满足$E(S_{a+k}-S_a)^2\leqslant g(a,k)$及$g(a,k)+g(a+k,m)\leqslant g(a,k+m)$ $(m\geqslant 1)$. 则

$$E\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_{a+j}-S_a|^2\right\}\leqslant(\log(2n)/\log 2)^2g(a,n).$$

12.（Doob）　设$\{S_n,\mathscr{F}_n\}$是鞅，则

$$E\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i|\right\}\leqslant\frac{e}{e-1}(1+E|S_n|\log^+|S_n|),\ E\left\{\sup_{n\geqslant 1}|S_n|\right\}$$

$$\leqslant\frac{e}{e-1}(1+\sup_{n\geqslant 1}E|S_n|\log^+|S_n|);$$

又对$p>1$

$$E\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i|^p\right\}\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^pE|S_n|^p,\ E\left\{\sup_{n\geqslant 1}|S_n|^p\right\}\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sup_{n\geqslant 1}E|S_n|^p.$$

13.（Marcinkiewicz-Zygmund Burkholder）　设$\{X_j\}$是鞅差序列，则对任意$p>1$，存在正的常数$a_p\leqslant b_p$和$a'_p\leqslant b'_p$使得

$$a_pE\left(\sum_{j=1}^{n}X_j^2\right)^{p/2}\leqslant E|S_n|^p\leqslant b_pE\left(\sum_{j=1}^{n}X_j^2\right)^{p/2};$$

$$a'_pE\left(\sum_{j=1}^{\infty}X_j^2\right)^{p/2}\leqslant\sup_{n\geqslant 1}E|S_n|^p\leqslant b'_pE\left(\sum_{j=1}^{\infty}X_j^2\right)^{p/2}.$$

14.设$\{X_j\}$是独立 r.v. 列，$EX_j=0$，存在$r>2$，$E|X_j|^r<\infty$. 记$s_n^2=\sum\limits_{j=1}^{n}EX_j^2$. 则有$M>0$使得

$$|E|S_n/s_n|^r-E|N(0,1)|^r|\leqslant Mn^{-(1\wedge(r-2))/2};$$

若是$r\geqslant 4$（i.i.d. 时$r\geqslant 3$）的整数，则绝对矩可换成矩.

七、指数不等式

1. 设 $X \leqslant 1$ a.s.，则 $E(\exp X) \leqslant \exp(EX + EX^2)$.

2. 下列事实等价：

(1) 存在 $H > 0$，当 $|t| < H$ 时，$Ee^{tX} < \infty$；

(2) 存在 $a > 0$，$Ee^{a|X|} < \infty$；

(3) 存在 $b > 0$ 和 $c > 0$，对一切 $x > 0$，$P\{|X| \geqslant x\} \leqslant be^{-cx}$；

(4) 存在 $g > 0, T > 0$，当 $|t| \leqslant T$ 时 $Ee^{tX} \leqslant e^{gt^2}$.

以下设 $\{X_j\}$ 为独立 r.v. 列，记 $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$.

3. 设 $g_1, \cdots, g_n, T$ 为正常数，当 $0 \leqslant t \leqslant T$（$-T \leqslant t \leqslant 0$）时 $Ee^{tX_k} \leqslant e^{g_k t^2/2}$. 记 $G = \sum_{j=1}^{n} g_j$，则对 $0 \leqslant x \leqslant GT$ 有

$$P\{S_n \geqslant x\} \leqslant e^{-x^2/2G} \quad (P\{S_n \leqslant -x\} \leqslant e^{-x^2/2G})；$$

对 $x \geqslant GT$ 有

$$P\{S_n \geqslant x\} \leqslant e^{-Tx/2} \quad (P\{S_n \leqslant -x\} \leqslant e^{-Tx/2}).$$

4. 设 $EX_j = 0$，$\sigma_j^2 = EX_j^2 < \infty$，$B = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2$. 假设存在 $H > 0$，对任意整数 $m \geqslant 2$，$|EX_j^m| \leqslant \frac{m!}{2}\sigma_j^2 H^{m-2}$，则对 $0 \leqslant x \leqslant B/H$ 有

$$P\{S_n \geqslant x\} \leqslant e^{-x^2/4B}, \quad P\{S_n \leqslant -x\} \leqslant e^{-x^2/4B}；$$

对 $x \geqslant B/H$ 有

$$P\{S_n \geqslant x\} \leqslant e^{-x/4H}, \quad P\{S_n \leqslant -x\} \leqslant e^{-x/4H}.$$

5. 设 $0 \leqslant EX_j < \infty$ 且存在正数 $g_1, \cdots, g_n$ 和 T，当 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时 $Ee^{tX_j} \leqslant e^{g_j t^2/2}$，则

$$P\left\{\max_{1 \leqslant i \leqslant n} S_i \geqslant x\right\} \leqslant e^{-x^2/2G} \quad (0 \leqslant x \leqslant GT),$$

$$P\left\{\max_{1 \leqslant i \leqslant n} S_i \geqslant x\right\} \leqslant e^{-Tx/2} \quad (x \geqslant GT).$$

6. (Hoeffding)

(1) 设 $0 \leqslant X_j \leqslant 1$，记 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$，$\mu = E\overline{X}$，则对 $0 < x < 1 - \mu$，

$$\begin{aligned} P\{\overline{X} - \mu \geqslant x\} &\leqslant P\left\{\max_{1 \leqslant i \leqslant n}(S_i - ES_i) \geqslant nx\right\} \\ &\leqslant \left\{\left(\frac{\mu}{\mu + x}\right)^{\mu + x}\left(\frac{1 - \mu}{1 - \mu - x}\right)^{1 - \mu - x}\right\}^n \\ &\leqslant e^{-g(\mu)nx^2} \leqslant e^{-2nx^2}, \end{aligned}$$

其中 $g(\mu)=\frac{1}{1-2\mu}\ln\frac{1-\mu}{\mu}\left(0<\mu<\frac{1}{2}\right)$, $\frac{1}{2\mu(1-\mu)}\left(\frac{1}{2}\leqslant\mu<1\right)$.

(2) 设 $a_j\leqslant X_j\leqslant b_j$, 则对任意的 $x>0$

$$P\{\overline{X}-\mu\geqslant x\}\leqslant P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}(S_k-ES_k)\geqslant nx\right\}\leqslant e^{-2n^2x^2/\sum_{j=1}^{n}(b_j-a_j)^2}.$$

7. (Bennett) 设 $X_j<b$, $EX_j=0$, 记 $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}EX_j^2$, 则对任意的 $x>0$

$$P\{\overline{X}>x\}\leqslant P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}S_k\geqslant nx\right\}\leqslant\exp\left\{-\frac{nx}{b}\left[\left(1+\frac{\sigma^2}{bx}\right)\ln\left(1+\frac{bx}{\sigma^2}\right)-1\right]\right\},$$

对 $0<x<b$, 上述界可改为

$$\left\{\left(1+\frac{bx}{\sigma^2}\right)^{-(1+bx/\sigma^2)\sigma^2/(b^2+\sigma^2)}\left(1-\frac{x}{b}\right)^{-(1-x/b)b^2/(b^2+\sigma^2)}\right\}^n.$$

8. (Bernstein) 设 $EX_j=0$, 对某 $a>0$ 和一切 $n\geqslant2$, $E|X_j|^n\leqslant v_jn!a^{n-2}/2$, 则对一切 $x>0$

$$P\{\sqrt{n}\,\overline{X}\geqslant x\}\leqslant\exp\left\{-\frac{x^2/2}{\sum_{j=1}^{n}v_j/n+ax/\sqrt{n}}\right\}.$$

特别地, 当 $|X_j|\leqslant m$ 时有

$$P\{\overline{X}\geqslant x\}\leqslant\exp\left\{-\frac{n^2x^2}{2\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Var}X_j+2mnx/3}\right\}.$$

9. (Kolmogorov-Prohorov) 设 $EX_j=0$, $EX_j^2<\infty$, 记 $s_n^2=\sum_{j=1}^{n}EX_j^2$, 设 $|X_j|\leqslant cs_n$ a.s. $(j=1,\cdots,n)$.

(1) 设 $\varepsilon>0$ 满足 $\varepsilon c<1$, 则 $P\{S_n/s_n>\varepsilon\}<\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2}\left(1-\frac{\varepsilon c}{2}\right)\right\}$;

(2) 设 $\varepsilon>0$, 则 $P\{S_n/s_n\geqslant\varepsilon\}<\exp\left\{-\frac{\varepsilon}{2c}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{\varepsilon c}{2}\right)\right\}$;

(3) 对 $r>0$ 存在 $\varepsilon(r)$ 和 $\pi(r)$, 当 $\varepsilon\geqslant\varepsilon(r)$ 和 $\varepsilon c<\pi(r)$ 时

$$P\{S_n/s_n>\varepsilon\}\leqslant\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2}(1+r)\right\}.$$

10. 设 $\{X_j\}$ 是 i.i.d. r.v. 列, 则对任意正数 b, v 和 s,

$$P\left\{\left|\sum_{j=1}^{n}X_jI(|X_j|\leqslant b)-E\sum_{j=1}^{n}X_jI(|X_j|\leqslant b)\right|\right.$$

$$\geqslant \frac{v}{2b} e^{v} n E X_1^2 I(|X_1| \leqslant b) + \frac{sb}{v} \Big\}$$

$$\leqslant 2e^{-s}.$$

特别地，对任意 $\sigma^2 \geqslant EX_1^2 I(|X_1| \leqslant b)$, $b > 0$, $x > 0$ 有

$$P\Big\{ \Big| \sum_{j=1}^{n} X_j I(|X_j| \leqslant b) - E \sum_{j=1}^{n} X_j I(|X_j| \leqslant b) \Big|$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\Big\{1 + \exp\Big(\frac{bx}{\sqrt{n}\,\sigma}\Big)\Big\} x \sqrt{n}\,\sigma \Big\}$$

$$\leqslant 2e^{-x^2/2}.$$

参考书目

[1] 王梓坤. 概率论基础及其应用. 北京:科学出版社,1976

[2] 严士健,刘秀芳. 测度与概率. 北京:北京师范大学出版社,1994

[3] 吴智泉,王向忱. 巴氏空间上的概率论. 长春:吉林大学出版社,1990

[4] 程士宏. 高等概率论. 北京:北京大学出版社,1996

[5] 复旦大学编. 概率论(第一册概率论基础). 北京:人民教育出版社,1979

[6] 林正炎,陆传荣. 强极限定理. 北京:科学出版社,1992

[7] Billingsley P. Convergence of Probability Measures. New York: Wiley, 1968

[8] Chen M F. From Markov Chain to Non equilibrium Particle System. Singapore: World Scientific, 1994

[9] Chow Y S, Teicher H. Probability Theory. Berlin: Springer Verlag, 1988

[10] Chung K L. A Course in Pobability Theory, 2nd. New York: Academic Press, 1974

[11] Csörgö M, Révesz P. Strong Approximations in Probability and Statistics. New York: Academic Press, 1981

[12] Гнеденко Б В, Колмогоров А Н. Предельные Распределения для Сумм Независимых Случайных Величин. Москва: Гостехиздат. 1949

[13] Freedman D. Brownian Motion and Diffusion. Berlin: Springer-Verlag, 1971

[14] Hall P. Rate of Convergence in the Central Limit Theorem. Boston: Pitnam Publishing, 1982

[15] Ikeda N, Watanabe S. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. Amsterdam: North Holland, 1981

[16] Ledoux M, Talagrand M. Probability in Banach Spaces - Isoperimetry and Processes. Berlin: Springer Verlag, 1991

[17] Loéve M. Probability Theory, 4th edition, Berlin: Springer

Verlag, 1978

[18] Petrov V V. Limit Theorems of Probability Theory-Sequences of Independent Random Variables. Oxford: Oxford Science Publications, 1995

[19] Pollard D. Convergence of Stochastic Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1984

[20] Skorohod A V. Studies in the Theory of Random Processes. Reading Mass: Addison-Wesley, 1961

[21] Stout W F. Almost Sure Convergence. New York: Academic Press, 1974

[22] Золотарев В М. Современная теория суммирования независнмых случайных величин. Москва: Наука, 1986

索　引

十二画及以上